Mathesis. Arithmetica. Systemata et methodi 213.

P. Beda Mayrs

Benediktiners zum heiligen Kreuze in Donauwerd

Anfangsgründe

der

Mathemathik und Algebra

zum Gebrauche

in höhern und niedern

Schulen.



Augsburg,

bey Matthäus Riegers sel. Söhnen.

1792.

Meinem lieben

Aloys von Ruoesch,

dem

hoffnungsvollen Sohne

des

Hochfürstlich Oetting-Spielbergischen

geheimen Rathes

und Regierungspräsidenten

von Ruoesch.

Lieber Louis!

Wir führten vor drey Jahren eine Correspondenz miteinander, die vieleicht die einzige in ihrer Art war. Sie fiengen als ein Kind von fünf Jahren an Briefe an mich zu schreiben. Aber ich konnte nicht lesen, was Sie schrieben. Ich will's nun erwiedern, und Ihnen auch etwas zuschreiben, das Sie größtentheils jetzt auch noch nicht werden lesen können. Machen Sie es gerade, wie ich's machte. Ich wartete, bis mirs **Jemand** erklärte, was Sie mir mit Ihrem Geschreibe hätten sagen wollen. Zwar dieser **Jemand**, der mir Ihre Kritzeleyen dollmetschte, wird Ihnen die meinigen nicht dollmetschen können; denn ihre gute, liebe, brave Mama ist zu sehr Mutter, und Hauswirthinn, als daß Sie auch Algebristinn seyn könnte. Aber Sie werden doch Lehrer finden, welche sie Ihnen erklären können. Und da es Ihnen weder an guten Anlagen zur Mathematik, noch auch an Lust, und Fleiße fehlt, wie Sie beydes in einer zu D. mit Ihnen angestellten Prüfung bewiesen haben, so darf ich hoffen, daß Ihnen diese **Anfangsgründe** einmal zum Leitfaden dienen könnten, wenigstens so viel in diesem Theile der Mathematik zu erlernen, als Ihnen zu Ihrer künftigen Bestimmung nothwendig seyn möchte. Diese ist vermuthlich

keine

keine andere, als dem Staate einmal als Civilbeamter zu dienen. Und daß man auch da etwas von der gemeinen, und politischen Arithmetik, und folglich auch von der Algebra wissen dürfe, kann Ihnen Ihr verehrungswürdiger Herr Papa zuverläßig sagen, der neulich die vortreffliche **Hochfürstlich Oetting-Oetting, und Oetting-Spielbergische Brand-Versicherungs-Ordnung** entworfen hat.

Gelangen Sie einmal zu dem Alter, daß Sie über die vier Species hinausgehen können, so durchblättern Sie diese Anfangsgründe. Hoffentlich werden Sie Nutzen davon haben. Und das ist es, was ich wünsche. Mehr weis ich doch nicht zu thun, um meine Erkenntlichkeit für alle die freundschaftliche Behandlung zu beweisen, die ich so oft in Ihrem Hause erfahre.

Ihr

Beda.



Vorrede.

Ich bin kein Mathematiker von Profession, und schreibe ein mathematisches Lehrbuch — und schreibe es eben darum, weil ich es nicht bin.

Männer, die sich schon lange mit der Mathematik beschäftiget, und tiefere Einsichten darinn erworben haben, können sich selten mehr an alle die Schwierigkeiten erinnern, mit denen sie in ihren jüngern Jahren zu kämpfen hatten, als sie diese Wissenschaft zu erlernen anfiengen. Sie wähnen gleichwohl, es sey den Anfängern alles so klar und deutlich, als es ihnen jetzt ist, und fühlen also weder die Nothwendigkeit, noch haben sie die Geduld, alle Kleinigkeiten für die Fassungskraft der Anfänger zu entwickeln. Ich weis zwar wohl, daß es uns nicht an vortrefflichen Elementen der Arithmetik und Algebra fehlt. Aber sie sind entweder lateinisch geschrieben, oder in unsern Gegenden nicht so leicht zu haben, oder zu theuer. Warum

man eben in der Mathematik ein lateinisches Vorlesbuch nehmen soll, sehe ich nicht ein, besonders wenn es zugleich für die niedern Schulen brauchbar seyn soll. Was soll man für den Anfänger ohne Noth die Schwierigkeiten häufen, und mit ihm zugleich in einer Sprache reden, die er noch nicht versteht, da die Mathematik selbst für manchen schwer genug ist?

Ich zähle mich noch gerne selbst unter die Anfänger, und habe täglich Gelegenheit mit Anfängern umzugehen, habe sie schon seit mehr als dreyßig Jahren. Und darum glaube ich auch, mit ihren Bedürfnissen, und Zweifeln bekannt genug zu seyn. In dieser Rücksicht möchte mir also wohl nichts fehlen, Anfangsgründe zuschreiben, welche der Fassungskraft der Jugend allerdings angemessen wären.

Aber habe ich auch selbst hinlängliche Kenntniß der Mathematik? Habe ich auch die Gabe, mich leicht, und faßlich ausdrücken?

Was das erste betrifft, will ich mich hier aufrichtig darüber erklären. Ich habe im Jahre 1760 nach der damaligen Weise ex uniuersa Philosophia Theses defendirt mit einem Aufwande von mehr als 200 Gulden. Es stunden unter andern Sätzen auch die von der einförmigen, und beschleunigten Bewegung, von der Bewegung in einer parabolischen Linie, von der Bewegung über schiefliegende Flächen u. s. w. Ich kann es betheuern, daß ich damals nicht einmal nume-

rire

riren konnte. Ja kaum wußte ich, daß es eine reine Mathematik gebe. Auf Lyceen wurde damals noch nicht an einen Unterricht in der Mathematik gedacht. Man kann sich also vorstellen, was für ein Held ich in der Physik damals mag gewesen seyn. Von ungefähr bekam ich Stieglers Lehrbuch, und in den Herbstferien auch Wolfs Anfangsgründe zu Gesicht. Ich fand Dinge darinn, die mich sogleich von der Nothwendigkeit der Mathematik zur Physik überzeugten, und begriff auch leicht, daß ich bisher noch nichts, als disputiren über Sätze der Physik gelernet hätte. Dieß erweckte in mir eine Freude zur Mathematik, und weil ich noch ein Jahr zu warten hatte, bis ich ins Kloster aufgenommen wurde, entschloß ich mich, dieses Jahr der Erlernung der Mathematik allein zu wiedmen. Die Theologie, dachte ich, mußt du im Kloster doch noch studiren, und zur Mathematik hast du vieleicht hernach keine Gelegenheit mehr. Wenn du nur so weit kömmst, daß du einmal ohne fremde Beyhülfe mathematische Bücher verstehen kannst. Weil sich eben eine Gelegenheit darboth, gieng ich nacher Freyburg im Breisgau, und hatte da das Glück, daß der würdige Lehrer der Mathematik, Ignaz Zanner S. J. mir täglich ein Privatcollegium über die Mathematik hielt, dem ich darum, wenn er noch am Leben ist, hier öffentlich meinen Dank abstatten will. Vom November bis zum Julius studirte ich, und ich darf sagen, mit Freude und Eifer die Arithmetik nach Lechner und de la Caille, die Algebra nach Clairault, die Rechnung

des Unendlichen nach de la Caille, die Astronomie nach eben demselben, die Geometrie nach Huberti, die Kegelschnitte nach de la Caille, und noch für mich allein etwas von der Optik, und ihren Theilen, auch vonder Mathematik nach Weidler. Ich schafte mir zugleich einen Vorrath von mathematischen Büchern für ungefähr 100 fl. an.

So kam ich ins Kloster. Meine mathematischen Bücher waren meine Unterhaltung in den trüben Stunden des Probierjahres, die ich nothwendig haben mußte, weil ich ganz allein war. Man untersagte mir auch diese Unterhaltung nicht. Nach Endigung des Probjahres mußte ich zwar die gewöhnlichen Klosterstudien anfangen. Aber nebenbey war doch immer Mathematik mein Lieblingsstudium, und würde es auch geblieben seyn, wenn ich meinem Hange hätte folgen dürfen. Allein mein Schicksal war mir nicht so günstig. Und ich mußte mich seit 1767 mit ganz andern Dingen abgeben. Es fehlte mir auch einige Zeit an Büchern, und Instrumenten, ohne welche man eben keine große Vorschritte machen kann. Doch vergieng seit dieser Zeit fast kein Jahr, worinn ich nicht andern die Anfangsgründe der Mathematik zu erklären hatte, und neben meinen Berufsarbeiten wählte ich mir immer junge Leute, denen ich wenigstens so viel davon beygebracht, als ich selbst wußte, und ich hatte den Trost mehrere so weit gebracht zu haben, daß sie sich jetzt wirklich mit Ehren auf öffentlichen Lehrstühlen zeigen kön-

können. Aber freylich hat ihr Fleiß erst ersetzet, was meinem Unterrichte mangelte. Ich konnte also doch ein Lehrbuch schreiben.

Ob ich auch die Gabe habe, mich deutlich auszudrücken, darüber mögen Kenner entscheiden. Das Buch ist zu Vorlesungen bestimmt, und nicht geschrieben, daß Jemand die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra ohne fremde Unterweisung daraus lernen soll. Ich leugne nicht, daß man die Mathematik ohne mündlichen Unterricht aus Büchern erlernen könne. Aber die Anzahl derer, die es auf diese Art weit darinn gebracht haben, ist gewiß gering, und eben so richtig ist es, daß man durch den Unterricht in ein paar Monaten weiter komme, als durch das bloße Lesen, und Studiren in einem Jahre. Bücher, die man von sich selbst verstehen soll, müssen so ausführlich, und weitläuftig abgefaßt seyn, daß sie nothwendig auch theuer zu stehen kommen, welches gegen meine Absicht gewesen wäre. Nichts destoweniger habe ich mich bey Dingen länger aufgehalten, die Anfängern gemeiniglich schwerer scheinen. Um nicht weitläuftig zu werden brachte ich bey den verschiednen Rechnungsarten nur wenige Beyspiele an. Der Lehrer findt ja in allen Rechenbüchern Items und Exempel genug. Nur algebraische Aufgaben habe ich viele gesammelt, weil man darinn junge Leute lange üben muß, um sie mit den verschiednen Arten eine Gleichung aufzufinden recht bekannt zu machen.

Eines muß ich die Lehrer, welche sich vielleicht meines Lehrbuches bedienen werden, vorzüglich bitten. Sie sollen nicht eilen. Der Eifer ist ganz gut, den einige zeigen, indem sie ihren Schülern in einem Jahre die ganze Arithmetik beybringen wollen. Aber der Nutzen mag eben nicht gar beträchtlich seyn. Bey den meisten verfliegt sich das eben so geschwind wieder, als sie es erlernet haben, und man hat im Anfange eines neuen Schuljahres fast allzeit nöthig mit dem Numeriren anzufangen. Und bey alle dem bringt man es doch selten so weit, daß der eigentliche Lehrer der Mathematik in den obern Schulen eine vollständige Kenntniß der Arithmetik mit ganzen, und gebrochenen Zahlen bey seinen Zuhörern voraussetzen dürfte. Er muß die kostbare Zeit, in welcher er sie weiter führen könnte, mit dem Vortrage der gemeinen Rechnungsarten zubringen, und weil es dabey nothwendig etwas schnell gehen muß, erlangen sie darinn wieder keine Fertigkeit. Sie stehen oft bey Auflösung der letzten algebraischen Aufgabe noch in der Multiplication, und Division der Zahlen an. Ich würde also immer rathen, daß man die Schüler langsam führen soll.

Sollte es z. B. nicht genug seyn, wenn sie in einem Schuljahre nur die sogenannten fünf Species, und nichts weiter lerneten? Die Eintheilung aller Materien für die verschiednen Klassen werde ich hernach vorlegen. Da gewänne man Zeit, ihnen jede Regel der Addition, Subtraction ꝛc. besonders vorzukäuen, ihnen

von jeder den Beweis zu geben, und so lange dabey stehen zu bleiben, bis sie alle gefaßt hätten. Dazu ist auch mein Lehrbuch eingerichtet. Man sehe z. B. nur die Regeln der Division nach. Ich führe den Anfänger Schritt für Schritt zu erst auf das Anschreiben des Divisors, und zeige ihm die Ursache, warum er ihn gerade so, und nicht anders anschreiben muß. Hat man ihn darinn, auch wenns nothwendig seyn sollte, einige Tage geübt, bis er vollkommen nicht nur das Mechanische, sondern auch die Ursache davon begreift, so geht man an die II Regel, und übt ihn darinn wieder so, u. s. f. Man geht zwar langsam, und es können Wochen verfließen, bis man alle Regeln erklärt hat. Aber der Nutzen ist gewiß auch größer. Der Anfänger wird nicht mit zu vielen Regeln auf einmal überhäuft, drückt sich jede besser ein, und hat nicht so leicht zu fürchten, daß er sie wieder so bald vergessen werde, wie es insgemein geschieht.

Ich würde folgende Eintheilung der Materie vorschlagen:

Für die erste Classe. Die fünf Species von §. 1 — 43.

Für die zweyte Classe. Die vier Species mit gemischten Zahlen, gemeinen und Decimalbrüchen, von §. 43 — 78.

Für die dritte Classe. Die algebraischen vier Species nebst der Erhebung zu den Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln, von §. 43 — 129.

Für

Für die fünfte Classe. Die Lehre von den Gleichungen, und Auflösungen der Aufgaben, von §. 129 — 199.

Für die fünfte Classe. Die Lehre von den Proportionen, und Logarithmen, von §. 199 bis ans Ende.

Das ist aber nicht so gemeynt, als wenn man alles, was in diesen §§. vorkömmt, schon in den untern Schulen erklären müßte. Nein, das Schwerere wird für den eigentlichen Lehrer der Mathematik aufbewahrt, nemlich die Auflösung eines Bruches in eine Reihe, von §. 88 — 91. Der binomische Lehrsatz von §. 93 — 97 und von 105 — 106, 108 — 111, die Rechnung mit Exponenten und Radicalgrößen, von §. 111 — 129. Die Anwendung der geometrischen Proportionen von §. 243 — 249. Die Lehre von den Reihen und ihrer Summirung von §. 253 — 261. Da nun der Lehrer der Mathematik nicht mehr, wie sonst, so viele Dinge zu lehren hat, kann er etwas von der angewandten Mathematik, die Kegelschnitte rc. vortragen, welches zur bessern Einsicht in die Physik seinen Schülern sehr nützlich seyn wird.

Uebrigens ist mein Buch nicht streng nach der mathematischen Methode geschrieben, sondern es ist ein Mittelding zwischen einem gemeinen Rechenbuche, und einem andern, das sich strenge an die mathematische Methode hält. Beweise gab ich wenigstens von den

Haupt-

Hauptsätzen, weil ich nicht wollte, daß die Anfänger das Rechnen nur mechanisch lernen sollten, wie in gemeinen Rechenbüchern geschieht. Der strengen Methode entsagte ich darum, damit ich sie durch zu viele Berufungen auf vorhergehende Sätze, und gar zu häufige Beweise nicht ermüdete. Ueberhaupt scheint mir die Geometrie viel schicklicher, als die Algebra, junge Leute an die mathematische Lehrart zu gewöhnen. Doch glaube ich, es soll einem fähigen Kopfe nicht schwer seyn, da und dort den fehlenden Beweis aus dem, was gesagt worden ist, selbst zu finden.

Etwas vollkommenes zu leisten fühle ich mich selbst zu schwach. Doch glaube ich, manchen Vortheil bekannt gemacht zu haben, wie man junge Leute zur Kenntniß dieser nützlichen Wissenschaft führen kann.

Alles übrige ist nicht neu, und von andern längst gesagt worden. Auf neue Erfindungen mache ich gar nicht Anspruch. Vielmehr bekenne ich es aufrichtig, daß ich andere Authoren öfters benützet, und wo ichs nicht besser zu sagen wußte, ihnen nachgeschrieben habe. Meine Sache war nur, alles, so viel möglich, der Fassungskraft der Anfänger anzupassen, um ihnen wenigsten auf diese Art nützlich zu werden.

Endlich bitte ich alle, die sich dieser Anfangsgründe bedienen wollen, daß sie ja die am Ende angezeigten Fehler zuvor verbessern wollen. Bey meiner

Ent-

Entfernung vom Druckorte sind freylich viele eingeschlichen, und als ich sie wahrnahm, sah ich mich genöthigt vom Bogen J an die Korrektur selbst zu übernehmen, so viele Unbequemlichkeiten die Sache auch hatte. Aber auch alsdann mag mir noch mancher Fehler entwischt seyn, weil ich die Korrektur oft unter vielen unvermeidlichen Zerstreuungen vornehmen mußte, den Druck nicht aufzuhalten. Ich hoffe aber doch, es sollen keine wesentlichen Fehler stehen geblieben seyn.

Donauwerd, den 30 Jul. 1792.

Inhalt.



Inhalt.

Erstes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit Ziffern und ganzen Zahlen.

Zweytes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit Ziffern in gebrochenen Zahlen, oder Brüchen.

Drittes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit Buchstaben.

Viertes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit Potenzen und Wurzeln.

Fünf-

Fünftes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit incommensurablen Größen.

Sechstes Hauptstück.

Von der algebraischen Auflösungskunst.

Sie.

Siebentes Hauptstück.

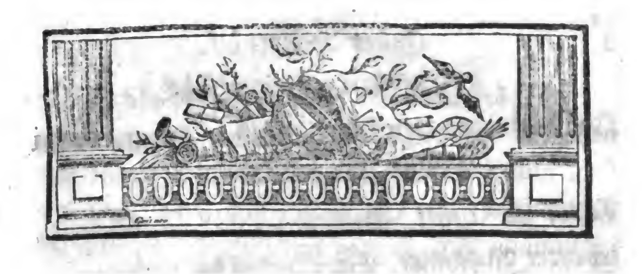
Die Lehre von den Verhältnissen, Proportionen, und Progressionen.

Achtes Hauptstück.

Von den Logarithmen.



Die



Die Rechenkunst mit Ziffern.

Erstes Hauptstück.
Die Rechenkunst mit ganzen Zahlen.

Einleitung.

1.

Eine Größe heißt alles, was sich vermehren, oder vermindern läßt. Man stellet sich selbige nemlich, als etwas vor, das aus mehrern Theilen zusammengesetzt ist, von denen man einige hinwegnehmen, und sie also kleiner machen; oder zu denen man einige hinzusetzen, und sie größer machen kann.

Jede Linie, Fläche, Wiese, Geschwindigkeit, Zeit, Zahl, u. s. w. ist eine Größe, Quantität, weil man sich selbige größer, oder kleiner denken kann, etwas davon hinwegnehmen, oder hinzusetzen kann.

2. Mathematik, oder Größenlehre ist diejenige Wissenschaft, welche die Größen ausmessen lehret.

Sie betrachtet also die Größen blos als Größen, und giebt auf die Eigenschaften der Dinge, die groß sind, nicht Achtung. An einer Kugel bestimmt sie den Durchmesser, ihre Oberfläche, und ihren Innhalt auf die nemliche Art, sie mag von Holz, Stein, oder Gold seyn. Sie behandelt die Zahlen z. B. 2, und 3 eben so, ob sie 2 und 3 Gulden, Heller, Menschen, oder Schuhe bedeuten.

3. Größen lassen sich nur zweyerley gedenken. Entweder stellet man sich die Theile, aus denen sie besteht, als **zusammenhängend**, oder **von einander getrennt** vor. In einem Haufen Geld, Sand, Kanonenkugeln hängt kein Stück an dem andern, jedes ist für sich, und von den übrigen getrennt. Hingegen besteht eine Linie, ein Stab, eine Wiese, die Höhe eines Kirchenthurms aus lauter zusammenhängenden Theilen. Bey Größen von getrennten Theilen sieht man insgemein nur auf die Menge der Theile, oder man untersuchet, aus wie vielen, und aus welchen Theilen sie besteht. Die Wissenschaft, welche lehret, wie man dabey zu verfahren habe, heißt **Rechenkunst, Arithmetik**, und im engern Verstande auch **Zahlenlehre**. Bey Größen von zusammenhängenden Theilen untersucht man den Umfang, oder die Gestalt derselben. Die Wissenschaft, welche Anweisung dazu giebt, heißt **Meßkunst, Geometrie**, welche Benennung aber ihrem Gegenstande nicht ganz entspricht, da Meßkunst etwas mehr, als **Messung der Erde, Geometrie**, sagen will. Diese beyden Theile zusammen, Arith-

Arithmetik, und Geometrie, nennet man die reine Mathematik.

4. **Angewandte Mathematik** ist die Anwendung der arithmetischen und geometrischen Lehren auf besondere Gegenstände, und ihre Eigenschaften, die entweder von der Natur, oder durch die Kunst hervorgebracht werden. In das Gebieth der angewandten Mathematik gehörte also eigentlich alles, wozu Rechnen und Messen erfordert wird. Indessen zählet nur jene Gegenstände daher, wobey sich vorzüglich von diesen Wissenschaften Gebrauch machen läßt. Man unterscheidet viererley solche Gegenstände, erstlich die **dynamischen** oder **mechanischen** Wissenschaften, worinn von den Kräften der festen, und flüssigen Körper gehandelt wird; und zwar davon, wie sich diese Kräfte theils bey ihrer Bewegung, theils damals äußern, wenn sie für sich selbst, oder mit andern Körpern das Gleichgewicht halten. Von der Bewegung der festen Körper handelt die **Mechanik**, von der Bewegung der flüssigen die **Hydraulik**, vom Gleichgewichte der Körper überhaupt, und der festen ins besondere die **Statik**, der flüßigen die **Hydrostatik**, und **Aereometrie**. Zweytens die **optischen** Wissenschaften, die vom Lichte, und den Gesetzen des Sehens handeln, die Stralen mögen nun von den Gegenständen in geraden Linien ins Aug kommen — dieß erklärt die **Optik** — oder im Durchgange durch eine durchsichtige Masse gebrochen werden — dieß erklärt die **Dioptrik** — oder von glatten, und polirten undurchsichtigen Oberflächen zu-

rück geworfen werden — dieß erklärt die Katoptrik — Hieher wird noch ein besonderer Theil, die Perspectiv, gerechnet, welche die Gegenstände auf einer Fläche so abbilden lehret, daß das Bild die nemliche Wirkung, wie der Gegenstand, im Auge macht. Drittens die astronomischen Wissenschaften. Hier wird von den Körpern des Weltgebäudes, und von der davon abhängenden Ausmessung der Zeit, und des Raumes geredet. Die Astronomie mißt die Entfernung, Figur, Größe und Bewegung der großen Körper, und bestimmt ihre Lage; die Geographie beschäftigt sich mit Ausmessung, und Eintheilung der Erdekugel; die Chronologie mit Ausmessung der Zeit nach der Bewegung der himmlischen Körper; die Gnomonik mit Ausmessung der Zeit aus dem Schatten, den ein von der Sonne, oder dem Monde erleuchteter Körper auf eine Fläche wirft. Viertens die technischen Wissenschaften zeigen die Anwendung der reinen Mathematik bey Kunstwerken, als bey der bürgerlichen, und Kriegsbaukunst, bey der Geschützkunst, Schiffahrt, und Schif- und Deichbaukunst, Taktik ꝛc.

5. Wenn ich an einer Größe gar nichts bestimme, als bloß, daß sie eine Größe ist, kann ich am füglichsten, um sie anzudeuten, einen Buchstaben gebrauchen, z. B. die Länge a, die Breite b, die Höhe c. Hier wird nicht bestimmt, wie viele Schuhe, Zolle, oder Linien die Länge, Breite, oder Höhe halte, oder wie groß a, b, oder c seyn. Nichtsdestoweniger wird von jeder Länge, Breite, und Höhe wahr seyn, was ich von a, b, c beweise.

6. Ich

6. Ich kann nicht sagen, was sey groß, oder klein, wenn ich es nicht mit einem andern Dinge vergleiche, in Ansehung dessen es groß, oder klein ist, und die nemliche Sache wird groß oder klein heißen, nachdem sie mit verschiednen Dingen verglichen wird. Ein Kind mit einem gestandnen Manne verglichen ist klein; aber groß, wenn ich es mit einer Fliege vergleiche, und die Fliege selbst ist gegen eine Blattlaus ein Elephant.

7. Um nun die Vergleichung zwoer, oder mehrerer Größen anstellen zu können, nimmt man ein bestimmtes Maaß an, das man eine **Einheit** nennet, und untersuchet, wie oft es in jeder der zuvergleichenden Größen enthalten ist. Jene Größe, in welcher dieses Maaß öfters enthalten ist, heißt groß in Ansehung derjenigen, die selbes nicht so oft enthält, und diese letztere nennet man klein. Sieh Fig. I. Es sollen die Linien AB, und CD miteinander verglichen werden, um zu finden, welche größer sey, als die andere. Man nimmt also einen Maaßstab f an, eine Einheit, mit dem man beyde ausmißt, und findt, daß f in AB zweymal, und in CD dreymal enthalten sey. Folglich ist CD größer als AB. Indessen ist es willkührlich, was ich für einen Maaßstab als Einheit annehmen will. Nehme ich den Maaßstab h zur Einheit, Fig. II, so ist er in AB viermal, in CD sechsmal enthalten.

a) Wie bey Linien, so giebt es auch bey Oberflächen, und Körpern ein Maaß, das man zur Einheit annimmt, wenn man die Größe derselben bestimmen will. Auch bey

getrennten Größen, wenn man ihren Innhalt bestimmt angeben will, muß man ein gewisses Maaß zur Einheit wählen. So sagt man: Ein Beutel enthalte fünf und zwainzig Gulden, oder Kreuzer, oder Pfenninge. Im ersten Falle ist der Gulden, im zweyten der Kreuzer, im dritten der Pfenning die Einheit, nach der das im Beutel enthaltene Geld bestimmt wird.

b) Um eine Einheit von was immer für einer Art auszudrücken bedient man sich des Zeichens (1), das also einen Gulden, Kreuzer, Pfenning, Schuh, Zoll, oder jede Einheit bedeuten kann, mit der eine andere Größe ausgemessen wird.

8. Die Einheiten sind **gleichartig**, so, wie auch die Größen, deren Einheiten sie sind, wenn jene das nemliche Maaß bezeichnen, und der Innhalt dieser durch das nemliche Maaß bestimmt wird. Sonst sind sie **ungleichartig**. Schuh, und Schuh, Zoll, und Zoll, Gulden, und Gulden sind gleichartige Einheiten; aber Schuh und Zoll, Gulden und Kreuzer miteinander verglichen, ungleichartige. Z. B. wenn das Maaß einer Linie in Schuhen, und der andern in Zollen, einer Summe Geld in Gulden, einer andern in Kreuzern angegeben wird, so sind das ungleichartige Größen, weil sie nach verschiednen Einheiten ausgemessen, oder bestimmt sind. So sind Fig. III. die Linien AB, und CD ungleichartig, weil jene durch die Einheit f, diese durch die Einheit h bestimmt ist, und f eine andere Einheit, als h ist.

9. Mehrere Einheiten zusammen genommen machen eine Zahl aus. Wird die Art der Einheiten bestimmt,

stimmt, so sind es benannte, wird sie nicht bestimmt, unbenannte Zahlen. Zwey, drey, vier Stunden, Minuten, Schuhe, Zolle, Gulden, Kreuzer rc. sind benannte Zahlen, zwey, drey, vier ohne Beysatz, von was für Einheiten die Rede sey, sind unbenannte Zahlen.

Die Erfahrung lehret, daß man das Rechnen leicht wieder vergißt. Dieß kömmt freylich zum Theil vom Abgange einer beständigen Uebung her. Aber die Hauptursache ist doch, weil man es insgemein nur mechanisch lernet, und die Gründe nicht einsieht, warum man bey jeder Rechnungsart gerade so, und nicht anders verfahren muß, wenn man das, was man soll, herausbringen will. Man muß also bey Anfängern vorzüglich darauf dringen, daß sie die Gründe einsehen, warum das Verlangte herauskommen muß, wenn man das thut, was die Rechenkunst vorschreibt, d. h. sie müssen beweisen lernen, daß man so addiren, subtrahiren u. s. f. muß, und die Richtigkeit der Regeln gleichsam mit Händen greifen. Darum wollen wir einige ungezweifelte Grundsätze vorausschicken, auf welchen alle Beweise beruhen, und auf die sie können zurückgeführt werden. Es sind folgende:

10. Die Theile, aus denen ein Ganzes besteht, sind zusammengenommen diesem Ganzen gleich.

Ein Theil ist kleiner, als das Ganze, wovon es ein Theil ist.

Wenn zwo Größen der nemlichen dritten gleich sind, sind sie auch selbst einander gleich.

Gleiches kann an die Stelle eines Gleichen gesetzt werden.

Gleiches zu Gleichen hinzugesetzt, giebt wieder Gleiches, so wie Gleiches von Gleichen hinweggenommen gleiche Reste giebt.

Gleiches von Ungleichen weggenommen, oder zu ihnen hinzugethan, giebt wieder Ungleiches.

Daß man gleichartige Dinge miteinander vergleichen, zusammenzählen, voneinander trennen könne, und dürfe, ist für sich klar.

11. Bequemlichkeit halber, damit man nicht so viel zu schreiben habe, bedienen sich die Mathematiker gewisser Zeichen, die entweder anzeigen, was man thun soll, oder wie sich die Größen gegeneinander verhalten

+ ist das Zeichen der Addition, und bedeutet, daß die Größe, vor welcher es steht, zu der vorhergehenden soll addirt werden. Z. Ex. $a+b$ bedeutet, daß die Größe b zur Größe a soll addirt werden. Man spricht es aus durch plus, oder und.

— ist das Zeichen der Subtraction, und bedeutet, daß die Größe, vor welcher es steht, von der vorhergehenden soll abgezogen werden. Z. B. $a-b$ bedeutet, die Größe b soll von der Größe a abgezogen werden. Es wird durch minus, minder, oder von ausgesprochen. Von einer andern Bedeutung, die diese zwey Zeichen + und — noch haben, wird unten geredet werden.

× ist das Zeichen der Multiplication, oder auch ein einzelner Punkt zwischen zwo Größen gesetzt, die mitein-

miteinander multiplicirt werden sollen. So heißt $a \times b$, oder $a . b$ a sey mit b multiplicirt. Sollen mehrere Größen durch eine, oder mehrere Größen multiplicirt werden, so faßt man so wohl die ersten, als die leztern besonders durch Klammern ein, oder zieht über beyde oben einen Strich. Z. B. $(a+b) \times (c+d)$, oder $(a+b) . (c+d)$, oder $\overline{a+b} \times \overline{c+d}$. Das heißt, a und b sollen so wohl durch c als d multiplicirt werden.

Das Zeichen der Division sind zween übereinander gesetzte Punkte (:). So bedeutet $a : b$, daß die vorhergehende Größe a durch die nachfolgende b dividirt werden soll. Man schreibt auch so $\frac{a}{b}$. Sollen mehrere Größen durch mehrere, oder eine dividirt werden, so zeigt man das, wie bey der Multiplication an, nur daß statt $\times$ oder . das Zeichen : dazwischen gesetzt wird, z. B. $(a+b) : (c+d)$ oder $\overline{a+b} : \overline{c+d}$

Das Zeichen der Gleichheit zwoer Größen ist $=$, und bedeutet, daß die Größen, zwischen welchen es steht, einander gleich sind $a+b = c+d$, oder a und b ist gleich c und d.

Um anzuzeigen, ein Ding sey größer, als das andere, bedient man sich dieses Zeichens $>$ so, daß die Oeffnung gegen das Größere hinsehe. Z. B. $a > b$, a ist größer, als b. Folglich ist jene Größe immer die kleinere, gegen die die Spitze des Zeichens gekehrt ist $a < b$: a ist kleiner als b.

Erster Abschnitt.

Vom Numeriren, und Anschreiben der Zahlen.

12. Es wäre viel zu weitläuftig, wenn man immer das ganze Wort schreiben müßte, das eine Zahl, zwey, drey, vier, fünf ꝛc. ausdrückt. Darum bedient man sich dafür gewisser Zeichen, oder Ziffer, nemlich 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, so wie man die Einheit (§. 7.) durch 1 ausdrückt.

Diese Zeichen sind ursprünglich aus Indien, und durch die Araber zu uns gebracht worden. Andere Völker haben sich, Zahlen zu bezeichnen, der Buchstaben bedienet, und bedienen sich derselben noch.

Allein durch diese neun Zeichen wäre dem Bedürfnisse noch bey weitem nicht abgeholfen. Wir könnten alle Zahlen, die über 9 gehen, noch nicht ausdrücken. Man müßte also alle Zahlen über 9 entweder nur mit Worten schreiben, welches bey großen Zahlen äußerst mühsam wäre, oder für jede höhere Zahl ein neues Zeichen erfinden, also unendlich viele Zeichen, da es unendlich viele Zahlen geben kann. Wer könnte sie aber alle ins Gedächtniß fassen? Man sah sich also genöthiget, den oben angeführten Ziffern verschiedne Werthe beyzulegen, und diese Werthe auf eine leicht faßliche Art anzuzeigen.

13. Dieß letztere hat man gewählet, und willkührlich angenommen, daß diese Ziffern nur an einem einzigen Orte ihre natürliche Bedeutung haben, und einfache Einheiten anzeigen sollen. Verrücket man sie aber von dieser Stelle links oder rechts, so sollen sie im ersten Falle zehnmal mehr, im zweyten zehnmal weniger

niger, als in der vorigen Stelle gelten. Rücket man sie wieder um eine Stelle weiter links, oder rechts, so gelten sie wieder zehnmal mehr, oder weniger, als sie in der zweyten Stelle zur Linken, oder Rechten von der ersten an gegolten haben, u. s. w. Ich will dieses willkührliche Gesetz, nach dem die Ziffern sich in ihrem Werthe richten, sinnlich vorstellen. Das Zeichen * bedeutet die Stelle, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth behalten. Das Zeichen (,) ist Gränze, hinter welcher der Werth abnimmt.

$$\overset{b}{4}\ \overset{a}{3}\ \overset{*}{2},\ \overset{c}{3}\ \overset{d}{4}$$

$\overset{*}{2}$ gilt zwey Einheiten, und zwar einfache, von welcher Art sie immer seyn. $\overset{a}{3}$ gilt, weil es von $\overset{*}{2}$ aus zur Linken an der zweyten Stelle steht, zehn Dreyer, oder jede ihrer Einheiten ist ein Zehner. $\overset{b}{4}$ an der dritten Stelle gilt vier Hunderter, jede ihrer Einheiten ist ein Hunderter, und gilt zehnmal so viel, als sie an der vorhergehenden zweyten Stelle gegolten hätte; denn da hätte sie nur vier Zehner gegolten, jetzt aber zehnmal vier Zehner, oder vier Hunderter.

$\overset{c}{3}$ an der zweyten Stelle rechts gilt nur den zehnten Theil von dem, was es an der Stelle * gegolten hätte. Da hätte es aber drey einfache Einheiten gegolten. Also gilt es hier nur drey Zehntheile. $\overset{d}{4}$ an der dritten Stelle rechts gilt zehnmal weniger, als es an der zweyten Stelle gegolten hätte. Da hätte es aber vier

Zehn-

Zehntheile gegolten. Also gilt es hier nur vier Hunderttheile. U. s. w. Noch ein Beyspiel:

$$\begin{matrix} b & a & \circ & c & d \\ 2 & 2 & 2, & 2 & 2 \end{matrix}$$

$\overset{\circ}{2}$ gilt zwey einfache Einheiten. $\overset{a}{2}$ gilt zehnmal zwey Einheiten, oder jede Einheit dieses Zweyers gilt zehn. $\overset{b}{2}$ Jede Einheit gilt hier Hundert, oder $\overset{b}{2}$ ist zweyhundert. $\overset{c}{2}$ gilt den zehnten Theil von $\overset{\circ}{2}$, oder zwey Zehntel, $\overset{d}{2}$ den zehnten Theil von $\overset{c}{2}$, oder zwey Hunderttheile.

14. Fehlet an einer Stelle eine Ziffer, so setzet man dafür das Zeichen o, oder eine Nulle, damit die Zahlen links, und rechts ihre Stelle von $\circ$ aus links, und rechts, und ihren Werth behalten. Eine Nulle für sich gilt also nichts, nur vermehret sie den Werth der links vor ihr, und vermindert den Werth der rechts nach ihr stehenden Zahlen zehnfach. So ist z. B. 2 zwey, 20 zwanzig, 200 zweyhundert, hingegen ,2 zwey Zehntel, ,02 zwey Hundertheile, ,002 zwey Tausendtheile.

Die Zahlen, die hinter dem Zeichen (,) stehen, nennet man **Decimalbrüche**, von denen an ihrem Orte wird geredet werden.

Man kann auch jede Zahl, die vor dem Zeichen (,) steht, als einen Bruch der ihr zur Linken stehenden Zahl ansehen. So ist in 32, die letzte Ziffer 2 ein Bruch der ihr zur Linken stehenden Ziffer 3; denn diese gilt dreyßig, oder

oder drey Zehner; jene aber, nemlich 2 ist nur zwey Zehntheile von dreyßig.

Ich habe gesagt, es sey **willkührlich**, daß eine von der Stelle * an links um eine Stelle vorgerückte Zahl zehnmal so viel gelten soll, als sie an der Stelle * gilt; denn man hätte eben sowohl annehmen können, daß jede Zahl von der Rechten zur Linken an der zweyten Stelle **zwey-drey-** oder **viermal** so viel gelten sollte, als an der Stelle *, an der dritten **zwey- drey-** oder **viermal** so viel, als an der zweyten, u. s. w. Hätte man angenommen, daß der Werth bey jeder Stelle vierfach wachsen sollte, so wäre z. B. in der Zahl 342, 2 = 2, 4 = 16, 3 = 48, und 342 = 66. Doch ist für den Rechner die zehnfache Vermehrung, oder Verminderung des Werthes die bequemste. Man nennet diese Zahlenreihe, deren Werth auf ersagte Art bestimmt wird, **das dekadische Zahlensystem.**

Es giebt auch ein **dodekadisches**, ein **Sexagesimalsystem** ꝛc. Jenes hat bey Werkschuhen, Zollen, Linien, Punkten; dieses bey Graden, Minuten, Sekunden u. s. w. Platz.

15. Nun ist es leicht, jede nach dem dekadischen Zahlensystem bedeutende Zahl **auszusprechen**, oder, wie man es heißt, zu **numeriren.** Man bemerke nur folgendes.

Erstens sprich niemal mehr als drey Zahlen zusammen aus, wovon die erste gegen die Linke **Hunderter**, die zweyte **Zehner**, die dritte **Einheiten** bedeutet

Zweytens. Es kömmt aber darauf an, was für Einheiten es sind, einfache, oder Einheiten von Tausendern, oder von Millionen, Billionen, Trillionen, u. s. w.

Damit

Damit man dieses erfahre, muß man von hinten angefangen, die auszusprechende Zahl in Classen abtheilen, deren jede, die erste gegen die Linke allein ausgenommen, aus drey Ziffern besteht. Nach den ersten drey Ziffern machet man unten, nach der zweyten Classe oben, nach der dritten unten einen Punkt, nach der vierten oben zween Punkte, nach der fünften unten einen, nach der sechsten oben drey Punkte, und so weiter, so daß wechselweise unten immer nur ein, oben aber immer um einen Punkt mehr komme, als vorher oben waren.

Drittens. Nachdem man die Zahlen jeder Classe von der Linken angefangen ausgesprochen hat, sage man dazu **tausend**, so oft unten ein Punkt kömmt, **Million**, wenn oben ein, **Billion**, wenn zween, **Trillion**, wenn drey Punkte kommen.

Zehnmal hundert tausend Einheiten spricht man mit einem Worte aus, und sagt dafür **Million**, für zehnmal hundert tausend Millionen **Billion**, für zehnmal hundert tausend Billionen **Trillion**, u. s. w. **Quatrillion, Quintillion** 2c. Z. B. Man soll aussprechen 2540063851605429.

Theile diese Zahl in Classen 2540063851605429

Dann sprich sie so aus: Zwey **tausend**, fünf hundert vierzig **Billionen**, drey und sechszig **tausend**, acht hundert ein und fünfzig **Millionen**, sechs hundert fünf **tausend**, vier hundert neun und zwainzig. Der Beweis ist aus dem dekadischen Zahlensystem klar; denn von hinten angefangen gilt

9 — neun

9 — neun Einheiten 2 — zwey Zehner 4 — vier Hunderter	von einfachen Einheiten. I. Classe.
5 — fünf Einheiten 0 — keine Zehner 6 — sechs Hunderter	von Tausenden, oder wo jede Einheit Tausend gilt. II. Classe.
1 — eine Einheit 5 — fünf Zehner 8 — acht Hunderter	von Millionen, wo jede Einheit eine Million gilt. III. Classe.
3 — drey Einheiten 6 — sechs Zehner 0 — keine Hunderter	von tausend Millionen, wo jede Einheit tausend Millionen gilt. IIII. Classe.
0 — keine Einheit 4 — vier Zehner 5 — fünf Hunderter	von Billionen, wo jede Einheit eine Billion gilt. V. Classe.
2 — zwey Einheiten	von Tausenden, wo jede Einheit tausend Billionen gilt. VI. Classe.

16. Soll man hingegen eine gegebene Zahl anschreiben, so weis man aus dem vorhergehenden, daß zu hundert drey, zu tausend vier, zur Million sieben, zur Billion dreyzehn, zur Trillion neunzehn Ziffern gehören. Dieß vorausgesetzt, bemerke man, wie viele Ziffern zur höchsten aus den anzuschreibenden Zahlen gehören. Man schreibe darauf die höchste Zahl selbst, und mache nach ihr so viele Punkten, als ihr noch Ziffern, oder Stellen folgen müssen. Darunter schreibe man die nächst kleinere, aber so, daß in der obern Reihe

gerade

gerade so viele Punkten noch nach ihr folgen, als nach ihr Ziffern, oder Stellen folgen müssen. So verfahre man, bis alle Zahlen angeschrieben sind. Dann schreibe man sie unten nebeneinander hin, wie sie von der Linken zur Rechten nacheinander folgen. Nur muß man da eine Nulle hinsetzen, wo nur ein Punkt, und keine Ziffer steht.

Z. B. Man soll fünfzehn Billionen, drey hundert vier und achtzig tausend fünf hundert sechs und vierzig Millionen, sechs und dreyßig tausend, und zwölf anschreiben. Nach einer Billion müssen zwölf Stellen folgen, schreib also so an:

15............	Billionen
3...........	dreymal hundert tausend Millionen
84.........	vier und achtzig tausend Millionen
5........	fünf hundert Millionen
46......	sechs und vierzig Millionen
36	sechs und dreyßig tausend
12	zwölf.
15384546036012	

Auf die nemliche Art kann man gleich alle Ziffern in die obere Zeile einschreiben, nachdem die höchste Zahl mit ihren gehörigen Punkten angeschrieben ist.

Zwey-

Zweyter Abschnitt.

Von der Addition unbenannter und benannter Zahlen.

17. Eine Größe kann nur vermehrt, oder vermindert werden. §. 1. Das, um was sie vermehrt, oder vermindert wird, ist wieder eine Größe. Setzt man zu einer Größe eine andere oder mehrere hinzu, so heißt man das **die Größen addiren**, und wenn man das bestimmt, was durch die Addition mehrerer Größen für eine neue Größe entstanden ist, so wird diese Größe die **Summe** genennt. Wird die nemliche Größe etlichmal zu sich selbst addirt, so bekömmt diese Verrichtung einen besondern Namen, und heißt **Multiplication.** Wird endlich eine Größe so oft zu sich selbst addirt, so viel sie Einheiten enthält, und diese Verrichtung ein, oder mehrmal wiederholt, so nennt man das **eine Größe zu einer Potenz erheben.**

18. Die Zahlen, welche addirt werden sollen, sind eben so viele Theile, aus denen man ein Ganzes zusammensetzen soll, oder eine **Summe.** Es ist für sich klar, daß man nur gleichartige Größen (§. 8.) zusammen addiren darf; also bey unbenannten Zahlen (§. 9.) nur Einheiten zu Einheiten, Zehner zu Zehner, bey benannten nur die, welche einen gleichen Namen haben; denn zween Zehner, und eine Einheit würden weder drey Zehner, noch drey Einheiten, zween Menschen, und ein Haus würden weder drey Menschen, noch drey Häuser ausmachen.

19. **Regeln der Addition.** I. Schreib die zu addirenden Zahlen so unter einander, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, u. s. w. zu stehen kommen. Z. B. 23 und 45 schreib weder so, $\begin{matrix}23\\ \quad 45\end{matrix}$, noch so, $\begin{matrix}\quad 23\\ 45\end{matrix}$, sondern so, $\begin{matrix}23\\ 45\end{matrix}$ und zieh sodann einen Strich darunter, wie hier $\begin{array}{r}23\\ \underline{45}\end{array}$

II. Fang bey den Einheiten an, zähle sie entweder von unten hinauf, oder von oben herab zusammen, und schreib ihre Summe unter den Strich gerade unter die Columne der Einheiten. Das nemliche thu auch bey der Columne der Zehner, Hunderter, Tausender rc. In unserm Exempel kömmt heraus $\begin{array}{r}23\\ \underline{45}\\ 68\end{array}$

III. Kömmt in einer Columne eine Zahl heraus, die größer, als **neun**, ist, so schreib nur die letzte Ziffer davon unter diese Columne; die übrige, oder übrigen zähle zu der nächsten Columne. Nur bey der letzten Columne zur Linken wird die ganze Zahl angeschrieben. $\begin{array}{r}56\\ \underline{48}\\ 104\end{array}$

IIII. Die Nullen, weil sie nichts gelten, werden nicht mitgezählt. Weil sie aber von den vor ihnen stehenden Zahlen ihren Werth erhalten (§. 14.) so muß man

unter

unter die Columne, unter die keine andere Ziffer zu stehen käme, eine Nulle schreiben. Z. B. 20

20
30
50

Andere Beyspiele:

236	1504	5600
652	7362	10
888	549	8400
	9415	7000
		21010

Wir wollen das letzte Exempel ausführlich vornehmen. In der letzten Columne sind lauter Nullen. Also muß nach der IIII. Regel auch eine Nulle unter den Strich kommen. In der zweyten Columne ist nur eine Einheit von Zehnern. Also wird diese nach der I. Regel unter die Coluinne der Zehner gesetzt. In der dritten Columne sprich 4 und 6 ist 10, schreib die Nulle an, und behalt 1 nach der III. Regel. Bey der vierten Columne sage: 1 — das du behalten hast — und 7 ist 8, und 8 ist 16, und 5 ist 21. Diese Zahl schreib ganz an nach der III. Regel. Eigentlich sollte das dritte Exempel so geschrieben seyn.

5000
600
10
8000
400
7000
21010

Da sieht man nun gleich, daß die Summe keine Einheit, einen Zehner, zehn Hunderter, oder einen Tau-

sender, und noch 20 Tausender, oder 21 Tausender enthalten müsse.

Beweis, daß man nach obigen Regeln recht addire, und die verlangte Summe erhalte. Man soll durch die Addition ein Ganzes finden, das so groß ist, als alle gegebene, und zu addirende Theile — Zahlen. — Nun sind diese Theile Einheiten, Zehner, Hunderter ꝛc. Nach dieser Verfahrungsart finde ich aber, wie viele Einheiten, Zehner, Hunderter alle Theile zusammen enthalten. Daß man aber aus jeder Columne, wo die Summe größer, als neun ist, die letzte Zahl anschreiben, und die übrigen zur nächsten Columne zählen muß, erhellet daraus, weil immer zehn Einheiten einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter, folglich eine Einheit der nächstfolgenden Classe ausmachen, und als Einheiten dieser Classe zu betrachten sind.

Soll man viele Zahlen zusammenaddiren, so ist es sicherer, die Columne zwey, oder dreymal abzutheilen, jede Abtheilung besonders, und endlich die Summen derselben zu addiren. Z. B.

```
  549
 1862
 5403
   12
  786   Summe  8612
 ----
 3504                      8612
 1000                     11128
  327                     19705
  689                     -----
 5608   Summe 11128       39445  die ganze Summe.
 ----
  440
 7847
  236
 4897
 6285   Summe 19705
 ----
```

20. Um

20. Um sich zu versichern, daß man bey der Addition keinen Fehler begangen habe, wiederhole man sie noch einmal; aber umgekehrt, d. i. wenn man zuvor die Ziffer von unten nach oben addirt hat, so addire man sie jetzt von oben nach unten, und sehe, ob die nemliche Summe herauskömmt.

Die sogenannte **Neunerprobe** hält nicht Stich; denn ob sie gleich eintreffen muß, wenn man nicht gefehlt hat, so **kann** sie doch auch eintreffen, wenn man gefehlt hat. Diese Probe besteht darinn: Man wirft sowohl von den zu addirenden Zahlen, als von ihrer Summe alle Neuner, d. h. so oft durch die Addition neun herauskömmt, weg, und wenn beyderseits der nemliche Rest bleibt, so ist die Addition richtig gemacht worden. Ich will die nemlichen Zahlen recht, und fehlerhaft addiren, und doch wird die Probe herauskommen.

347		347		347		347	
583	3	583	3	583	3	583	3
930	3	831	3	1020	3	939	3

Hier kömmt die Probe überall heraus; und doch ist nur im ersten Exempel recht addirt. Nemlich es muß immer eine gleiche Zahl von der Summe übrig bleiben, wenn ich in einer Columne die Summe um 1 zu groß, und in einer andern um 1 zu klein gemacht habe.

Man muß alle vier Rechnungsarten mit den Anfängern nicht nur in unbenannten, sondern auch in benannten Zahlen üben, damit sie lernen, in welchem Falle man diese, oder jene Operation zu gebrauchen habe. Sonst lernen sie wohl fertig rechnen. Aber wissen doch nicht bey der nächsten besten Aufgabe, was sie zu

thun haben. Man lasse sie also Ausgaben, Einnahmen, Jahrzahlen rc. addiren. Doch für jeẓt nur lauter gleichartige. Die Wahl der Exempel muß ich dem Lehrer überlassen, weil ich nicht weitläuftig werden darf.

Dritter Abschnitt.

Von der Subtraction unbenannter und benannter Zahlen.

21. Eine Größe kann um eine andere Größe vermindert, d. i. diese kann von jener abgezogen werden. Die Verrichtung heißt man Subtraction, Abziehung. Es giebt hier, wie bey der Addition (§. 17.) dreyerley Arten von Subtraction. Nimmt man von einer Größe eine andere hinweg, so heißt das eigentlich Subtrahiren. Nimmt man von einer Größe eine andere so oft hinweg, als man sie hinwegnehmen kann, so bekömmt diese Verrichtung den Namen Division. Suchet man endlich, welches die Größe sey, die durch ein, oder mehrmal wiederholte Multiplication mit sich selbst die gegebene Größe hervorgebracht hat, so nennet man das, die **Wurzel ausziehen.** Diese Größe wird nur durch wiederholte Subtraction gefunden.

22. Man betrachtet bey der Subtraction die Größe, von der eine andere abgezogen soll werden, als ein Ganzes, und die, welche abgezogen wird, als einen Theil dieses Ganzen, und das, was nach der Abziehung übrig bleibt, als den zweyten Theil dieses Ganzen. Das Ganze nennet man minuendus, was abgezogen wird, subtra-

subtrahendus, was übrig bleibt, den Rest, die Differenz, den Unterschied zwischen dem minuendus, und subtrahendus.

Also betrachtet man den minuendus als ein Ganzes, das aus zween Theilen, dem subtrahendus, und dem Reste besteht. Heißt der minuendus m, der subtrahendus s, der Rest d, so ist $m = s + d$.

23. Regeln der Subtraction. I. Schreib die abzuziehende Zahl unter die, von welcher du sie abziehen sollst, wieder Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner ꝛc. und zieh einen Strich darunter. Z. B. es soll 23 von 45 abgezogen werden, so schreib nicht

$$\begin{array}{l}45\\ \;\;23\end{array}, \text{ noch } \begin{array}{r}45\\ 23\;\;\end{array}, \text{ sondern } \begin{array}{r}45\\ \underline{23}\end{array}$$

II. Von der Rechten angefangen zieh die Einheiten von den Einheiten, die Zehner von den Zehnern ꝛc. ab, und schreib den Rest unter den Strich, und unter die Columne, zu der er gehört. Z. B. in obigem Exempel

$$\begin{array}{r}45\\ \underline{23}\\ 22\end{array}.$$

III. Bleibt in einer Columne nach Abzug der untern Ziffer von der obern nichts übrig, so setze im Reste eine Nulle, damit die Ziffern zur Linken, die noch folgen werden, ihren Werth behalten, und an ihrer Stelle bleiben. Z. B.

$$\begin{array}{r}45\\ \underline{25}\\ 20\end{array}$$

 IIII. Ist

IIII. Ist die zu subtrahirende Zahl größer, als die ober ihr stehende, so mache die obere um zehn größer, oder entlehne eine Einheit von der zur Linken folgenden Ziffer, die zehn Einheiten der nächst niedrigern Stelle gilt, und zieh von dieser vergrößerten Zahl die untere ab. Bezeichne aber zugleich die Ziffer, von der du 1 entlehnet hast, mit einem Punkt, damit du hernach, wann du von ihr subtrahiren wihst, dich erinnerst, daß sie jetzt um 1 kleiner sey. Z. B. 42

25

17

V. Ist die obere Ziffer eine Nulle, so entlehne wieder eine Einheit von der nächsten Ziffer zur Linken. Alsdann gilt sie 10, wovon sich die untere Ziffer abziehen läßt. 40

25

15

VI. Stehen mehrere Nullen oben nacheinander, und soll von der letzten eine untenstehende Ziffer abgezogen werden, so wird die Einheit von der nächsten zur Linken stehenden bedeutendeu Ziffer entlehnet, und alle Nullen, die nach dieser bedeutenden Ziffer stehen, gelten alsdann nur 9. Die Sache wird durch ein Beyspiel klar werden. Es soll von 1000, 1 abgezogen werden. Es ist richtig, daß nur 999 bleiben darf. Soll ich von der vorletzten Nulle 1 entlehnen, so gilt dieses 1 zehn wegen der letzten Nulle. Also 1 davon abgezogen bleibt 9. Nun kann ich aber von der vorletzten Nulle keine 1 entlehnen, weil sie keine hat. Also muß ich sie von

von der drittletzten entlehnen. Folglich können hier auch, weil eine 1 zur vorletzten 0 gesetzt worden, nur 9 bleiben. Von der drittletzten Nulle kann ich wieder keine 1 entlehnen, weil sie keine hat. Also entlehne ich sie von der vierten Stelle. Da also auch von diesen 10 eine Einheit zur drittletzten Nulle entlehnet worden, kann auch hier nur 9 bleiben. Es ist also

$$\begin{array}{r} \dot{1}\dot{0}\dot{0}0 \\ 1 \\ \hline 999 \end{array}$$

VII. Ist die untere Ziffer eine Nulle, so bedeutet das, ich soll von der ober ihr stehenden Ziffer nichts abziehen. Also wird die obere Ziffer unverändert an die gehörige Stelle in den Rest gesetzt, wenn sie nicht zuvor schon um 1 vermindert worden. Beyspiele:

I.	5687 3476 ―――― 2211	II.	470321 460221 ―――― 10100	III.	3949 754 ―――― 3195
IIII.	6040 2526 ―――― 3514	V.	40305 37487 ―――― 2818	VI.	50007004 23673506 ―――― 26333498

Man nehme das V. Exempel besonders vor, und sage, 7 von 5 kann ich nicht sagen, also 7 von 15 bleibt 8, schreibe es unter den Strich, und mache auf die Nulle, von der man 1 entlehnt hat, einen Punkt. Nun weiter 8 von 9 bleibt 1. Man setze 1 in den Rest, und zeichne über 3 einen Punkt. Dann fahre man fort. 4 von 12 bleibt 8. Dieses in den Rest

gesetzt, und über die obere Nulle einen Punkt gemacht, sage man wieder 7 von 9 bleibt 2, und endlich weil von 4, 1 entlehnt worden, 3 von 3 bleibt nichts. Weil keine Zahl im Minuendus mehr folgt, ist es unnöthig in den Rest eine Nulle zu setzen. Einige Beyspiele in benannten Zahlen.

Ich bin gebohren 1742. Wie alt bin ich im Jahre 1792.

1792
1742
50 Jahre.

Petrus ist im J. 1792 alt 75 Jahre. Wann ist er gebohren?

1792
75
1717

Einer hat von 7642 fl. ausgegeben 673. Wie viele Gulden hat er noch?

7642
673
6969

Man schreibe 45 an, ziehe 45 davon ab, daß doch 45 übrig bleiben. Dieß ist ein Räthsel. Man muß nemlich nicht die Zahl 45, sondern andere Zahlen anschreiben, die zusammengezählt 45 ausmachen.

987654321 = 45
123456789 = 45
864197532 = 45

24. Beweis, daß nach diesen Regeln recht subtrahirt werde. Wenn man die Einheiten, Zehner, Hunderter

derter ꝛc. des Subtrahendus von den Einheiten, Zeh-
nern, Hundertern ꝛc. des minuendus abzieht, so findt
man, wie viele Einheiten, Zehner, Hunderter ꝛc. dieser
mehr habe, als jener. Dieß ist aber eben die Absicht
der Subtraction; denn da der Minuendus als ein
Ganzes, das aus zween Theilen besteht, angesehen wird
(§. 22.), muß nothwendig der zweyte Theil übrig blei-
ben, wenn man den ersten wegnimmt.

25. Die Probe, ob man bey der Subtraction
nicht gefehlt habe, wird durch die Addition, und zwar
so gemacht, daß man den Rest, und den Subtrahen-
dus zusammen addire. Alsdenn muß der Minuendus
wieder hergestellt werden (§. 22.). Z. B. Es sey
von 6305 abgezogen worden 4920.

$$\begin{array}{r} \dot{6}\dot{3}05 \\ 4920 \\ \hline 1385 \\ \hline 6305 \end{array}$$

Hier ist augenscheinlich $s + d = m$. Und so
kann auch umgekehrt die Probe der Addition durch die
Subtraction gemacht werden. Wenn man nach und
nach die addirten Zahlen von der Summe abzieht, muß
zuletzt nichts übrig bleibrn; weil das Ganze, oder die
Summe, allen seinen Theilen zusammen gleich ist, und
wenn ich alle Theile wegnehme, muß auch das Ganze
verschwinden. (§. 10.)

Vierter Abschnitt.

Von der Multiplication benannter und unbenannter Zahlen.

26. Die Multiplication ist eine wiederholte Addition der nemlichen Größe zu sich selbst. (§. 17.) Man sagt z. B. ich sollte 6 dreymal zu sich selbst addiren, das wäre $6+6+6=18$. Allein die Arbeit wäre sehr langweilig, wenn ich z. B. 69 müßte 35 mal zu sich selbst addiren. Darum hat man auf eine Rechnungsart gedacht, welche die Arbeit abkürzen sollte. Und diese nennet man **Multiplication**, oder **Vermehrung**.

27. Es kommen bey der Multiplication dreyerley Zahlen vor, eine, die multiplicirt werden soll, oder der **Multiplicandus**, die zweyte, durch die jener multiplicirt werden soll, oder die anzeigt, wie oft ich jenen zu sich selbst addiren soll, oder der **Multiplicator**. Beyde führen auch den Namen **Factoren**. Die dritte, welche durch die Multiplication herauskömmt, oder das **Product**, **Factum**.

a) Es ist klar, daß der **Multiplicandus** im **Producte** gerade so oft enthalten seyn muß, als die **Einheit** im **Multiplicator**; denn wenn ich z. B. sage, man soll 6 so oft zu sich selbst addiren, so viele Einheiten in 3 sind, nämlich 3. Also muß ja 6 in 18, dem Produkte, auch dreymal enthalten seyn. $6+6+6=18$.

b) Es kömmt das nemliche Product heraus, ich mag den Multiplicandus mit dem Multiplicator, oder diesen mit

mit jenem multipliciren. Z. B. ich mag 6 mit 4, oder 4 mit 6 multipliciren: Das Product ist allzeit 24. Man drücke die Einheiten beyder Zahlen durch Punkte aus.

I.

. . . . Multiplicandus 4
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
Multiplicator 6

II.

. . . . . . Multiplicandus 6
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
Multiplicator 4

Man sieht, daß die Reihen der Punkte bey II nur eine veränderte Lage haben, übrigens aber so viele Punkte an der Zahl sind, als bey I. Sechs Reihen, jede mit 4 Punkten geben gerade so viel, als vier Reihen jede mit 6 Punkten.

Die Producte, die aus der Multiplication der ersten zehn Zahlen entstehen, wenn man was immer für zwey miteinander multiplicirt, sind in dem sogenanten **Einmal eins**, oder in der **Pythagorischen Rechentafel** enthalten. Man muß jenes nothwendig auswendig wissen, wenn man fertig multipliciren, oder dividiren will. Hier sind beyde:

Pytha-

Phytagorische Rechentafel.

1	2	3	4	5	6	7 *	8 **	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7 **	14	21	28	35	42	49	56 **	63	70
8 *	16	24	32	40	48	56 *	64	72	80
9	18	27	46	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Das Einmal eins.

mal ist	mal ist	mal ist
1 × 1 = 1	4 × 4 = 16	7 × 7 = 49
2 × 2 = 4	4 × 5 = 20	7 × 8 = 56
2 × 3 = 6	4 × 6 = 24	7 × 9 = 63
2 × 4 = 8	4 × 7 = 28	7 × 10 = 70
2 × 5 = 10	4 × 8 = 32	8 × 8 = 64
2 × 6 = 12	4 × 9 = 36	8 × 9 = 72
2 × 7 = 14	4 × 10 = 40	8 × 10 = 80
2 × 8 = 16	5 × 5 = 25	9 × 9 = 81
2 × 9 = 18	5 × 6 = 30	9 × 10 = 90
2 × 10 = 20	5 × 7 = 35	10 × 10 = 100
3 × 3 = 9	5 × 8 = 40	
3 × 4 = 12	5 × 9 = 45	
3 × 5 = 15	5 × 10 = 50	
3 × 6 = 18	6 × 6 = 36	
3 × 7 = 21	6 × 7 = 42	
3 × 8 = 24	6 × 8 = 48	
3 × 9 = 27	6 × 9 = 54	
3 × 10 = 30	6 × 10 = 60	

Will man sich der Rechentafel bedienen, um das Product zwoer Zahlen zu finden, so suche man eine Zahl in der obern Reihe, die andere in der ersten Columne herab, fahre hernach mit beyden Fingern, mit dem an der rechten Hand hinab in der nemlichen Columne, wo oben die Zahl steht, und mit dem an der Linken in der Reihe fort, bis sich die zween Finger begegnen. Dort wird ihr Product stehen. Z. B. man möchte wissen, wie viel 7 mal 8 sey. Suche oben 7 in der ersten Columne herab 8, und fahre mit den Fingern zusammen. In der Ecke wird 56 stehen. Ich habe hier die drey Zahlen mit * bemerkt. Eben das hätte man gefunden, wenn man oben 8, und zur Seite 7 genommen hätte, wie die mit ** bemerkten Zahlen zeigen.

28. **Regeln der Multiplication.** I. Schreib den Multiplicator unter den Multiplicandus. Es ist aber nach §. 27. eines, welche Zahl du zum Multiplicator wählest. Aber, wenn der Multiplicator mehrer Ziffern hat, so müssen Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner ꝛc. geschrieben werden. Besteht er nur aus Einheiten, so schreib ihn unter die Einheiten des Multiplicandus, und zieh unter beyde einen Strich so:

36,	36	Mutiplicandus
2	24	Multiplicator

II. Multiplicire durch den Multiplicator, wenn er nur aus einer Ziffer besteht, oder wenn es mehrere sind, mit der letzten derselben alle Ziffern des Multiplicandus der Ordnung nach von der Rechten zur Linken nach Anweisung des **Einmal eins.** Das Product setze immer unter die Ziffer, aus dessen Multiplication

es

es entstanden ist. Wenn das Product aus zwoen Ziffern besteht, schreib nur die letzte an. Die erste behalt im Gedächtniß, und addire sie zum Product der nächstfolgenden Zahl. $\begin{array}{r}32\\ \underline{2}\\ 64\end{array}$ sprich 2 mal 2 ist 4 und schreib 4 unter 2. Dann 2 mal 3 ist 6, und schrieb es unter 3. Oder $\begin{array}{r}36\\ \underline{24}\\ 144\end{array}$ sprich 4 mal 6 ist 24, schreib 4, behalt 2, 4 mal 3 ist 12, und zwey behalten ist 14. Dieß wird ganz angeschrieben, weil im Multiplicandus keine Zahl mehr folgt.

III. Besteht der Multiplicator aus mehrern Ziffern, so multiplicire aus mehrern Ziffern des Multiplicandus, nur fange die letzte Ziffer des Product da anzuschreiben an, wo die Ziffer steht, mit der du multiplicirst. Sonst beobachte auch die II Regel. Z. B. $\begin{array}{r}36\\ \underline{24}\\ 144\end{array}$ sprich 4 mal 6 ist 24, 4 schreib, behalt 2, 4 mal 3 ist 12, und 2 behalten, giebt 14. Dann multiplicire auch mit 2, der zweyten Ziffer des Multiplicators, und sage: 2 mal 6 ist 12, schreib 2 unter 2 des Multiplicators, behalt 1, dann weiter: 2 mal 3 ist 6, und 1 behalten ist 7. Dieses schreib neben 2 zur Linken.

IIII. Ist der ganze Multiplicandus durch alle Ziffern des Multiplicators vermehrt worden, so zieh unter die Producte einen Strich, und addire sie so zusammen,

sammen, wie sie über einander stehen. Ihre Summe ist das ganze Product des Multiplicandus, und Multiplicators. Z. B.

```
 36
 24
---
144
72
---
864
```

V Sind dem einen, oder dem andern Factor Nullen angehängt, so schneid sie indessen ab, und multiplicire nur die geltenden Ziffern miteinander, und an das Product hänge dann so viele Nullen, als beyde Factoren zugleich, oder einer allein hatte. Z. B.

```
 36|00        oder   36(0
 24|000               4
--------            -----
144                 1440
72
----
86400000
```

VI Hat der Multiplicandus in der Mitte eins, oder mehrere Nullen, weil 0 multiplicirt mit was immer für einer Zahl, oder eine Zahl niemal genommen allzeit nichts ist, schreibt man im Product auch eine Nulle an, wenn nicht vom vorhergehenden Product eine Ziffer behalten worden, die man alsdann an den Platz der Nulle schreibt. Z. B. 204 oder 204

```
204    204
  2      6.
---   ----
408   1224
```

VII Hat der Multipliplicator in der Mitte eine Nulle, oder mehrere, so überhüpft man sie, und multiplicirt gleich mit der folgenden bedeutenden Ziffer.

Nur muß man das entstehende Product nach der III Regel da anzuschreiben anfangen, wo der Ziffer des Multiplicators steht, mit der man wirklich multiplicirt. Z. B.

```
 368          oder      368
 203                   2003
----                   ----
1104                   1104
736                  736
-----                ------
74704                737104
```

29. **Beweis**, daß auf diese Art recht multiplicirt werde. Multipliciren heißt den Multiplicandus so oft nehmen, als der Multiplicator Einheiten enthält. §. 27. Dieß geschieht aber bey dieser Verfahrungsart, wo alle Einheiten, Zehner, Hunderter rc. des Multiplicandus genommen werden, so viele Einheiten, Zehner, Hunderter rc. der Multiplicator enthält. Ein Beyspiel wird die Sache erläutern. 256 soll durch 325 multiplicirt werden, oder 200 + 50 + 6 durch 300 + 20 + 5. Nach der angegebenen Verfahrungsart erhält man

```
  256
  325
 ----
 1280
 512
768
-----
83200
```

oder

oder

200 + 50 + 6	30
300 + 20 + 5	250
1000 + 250 + 30	1000
4000 + 1000 + 120	120
60000 + 15000 + 1800	1000
	1800
	4000
	15000
	60000
	83200

Man darf nur darauf Achtung geben, daß Einheiten mit Einheiten, Zehnern, Hundertern, Zehner mit Einheiten, Zehnern, Hundertern, Hunderter mit Einheiten, Zehnern, Hundertern multiplicirt werden, daraus wird man erkennen zu welcher Classe die Producte gehören, und wo sie hingeschrieben müssen werden.

30. Die Probe der Multiplication wird durch die Division am sichersten gemacht, wenn man nemlich das Product mit einem aus den zween Factoren dividirt, muß immer der andere heraus kommen. Wir können also diese Probe erst nach Erlernung des Dividirens machen.

Beyspiele zur Uebung

in unbenannten und benannten Zahlen.

36	304	10097	5326054	362
9	7	6	3	12
324	2128	60582	15978162	4344

```
  1575        2074        35|000
   481         308        27|00
 -----       -----       -------
  1575       16592       245
 12600      6222         70
 6300       ------      ----
 ------     638792      94500000
 757575
```

37 multiplicirt mit 3, oder 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 giebt allzeit drey gleiche Zahlen.

Ein Vater hinterläßt jedem seiner fünf Kinder 4732 fl. Wie groß war die ganze Erbschaft? 23660.

Wenn einer gerade 37 Jahre alt ist, wie viele Stunde, Minuten, und Secunden hat er bisher gelebt? 1166832000.

Auf einem Dache liegen der Länge nach 317, der Breite nach 154 Ziegel. Wie viele liegen auf beyden Seiten des Daches? 97636.

2560 fl. wie viele Heller geben sie? 1228800

In einer Minute laufen unter der Brücke eines Flußes 9072 Cubikschuh Wassers durch. Wie viele in einer Stunde? 364320.

30. Es giebt sehr viele Vortheile bey der Multiplication, von denen ich nur einige anführen will. Durch die Uebung wird man selbst auf mehrere gerathen. Man soll aber auch die meisten von denen, die ich hier zeigen werde, erst alsdann zu gebrauchen anfangen, wenn man sich in den Regeln der Multiplication recht geübt hat.

a) Ist

a) Ist der Multiplicator 1 mit einem, oder mehrern Nullen, so hänge man nur dem Multiplicandus alle diese Nullen an, weil 1 nichts multiplicirt. Z. B. $23 \times 10 = 230$, $23 \times 100 = 2300$, u. s. w.

b) Soll man eine Zahl mit 9 multipliciren, so multiplicire man sie mit 10, das ist, man hänge ihr, wie eben gesagt worden, eine Nulle an, und ziehe dann die Zahl selbst wieder davon ab, so ist der Rest 10 mal, minder einmal, das ist 9 mal so groß. Z. B.

$$\begin{array}{r} 508475 \\ 9 \\ \hline 4576275 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 5084750 \\ 508475 \\ \hline 4576275 \end{array}$$

c) Im Gegentheile, wenn eine Zahl mit 11 multiplicirt werden soll, so multiplicirt man sie zuerst mit 10, und addirt eben diese Zahl wieder dazu; denn eine Zahl 10 mal, und 1 mal nehmen, heißt sie 11 mal nehmen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 28749 \\ 11 \\ \hline 28749 \\ 28749 \\ \hline 316239 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 287490 \\ 28749 \\ \hline 316239 \end{array}$$

d) Soll eine Zahl mit 25 multiplicirt werden, multiplicire sie mit 100, das ist, hänge ihr zwo Nullen an, dann ist sie hundertmal größer. Nimm nun den vierten Theil davon, oder halbire sie zweymal (davon unten) so ist sie mit 25 multiplicirt. Durch die

erste Halbirung bekömmst du den halben, durch die zweyte den vierten, folglich den 25sten Theil von hundert.

```
 3578       oder     357800
   25                ------
-----                178900
17890                ------
 7156                 89450
-----
89450
```

e) Soll eine Zahl durch 5 multiplicirt werden, so multiplicire sie mit 10, und halbire sie, denn der halbe Theil des Zehnfachen ist das Fünffache.

```
 6041       oder     60410
    5                -----
-----                30205
30205
```

31. **Die Indische Art zu multipliciren, oder die Multiplication durch die Tabelle.** Wer multipliciren will, muß alle Ziffern des Multiplicandus durch alle Ziffern des Multiplicators vermehren. Da nun diese letzten Ziffern keine andere seyn können, als einige, oder alle von den ersten neun Ziffern, wird der Multiplicandus entweder einmal, oder zwey- drey- vier- bis neunmal genommen. Es wäre also recht bequem, wenn man gleich wüßte, was das Zwey- Drey- Vier- bis Neunfache des Multiplicandus wäre; denn alsdann, wenn ich z. B. mit 3, 4, oder 5 ꝛc. multipliciren sollte, dürfte ich nur das Drey- Vier- oder Fünffache ꝛc. abschreiben, ohne eine Multiplication nöthig zu haben. Darum machet man sich zuvor eine

Tabelle

Tabelle, welche alle Vielfache des Multiplicandus von 1 — 9 enthält. Diese Tabelle wird nun so verfertiget. Man schreibt den Multiplicandus zur Seite, addirt ihn zu sich selbst, dann dieß Zweyfache zum Einfachen, so erhält man das Dreyfache, dieses addirt zum Einfachen, giebt das Vierfache, und so immer fort, daß man immer nur die unterste Summe zum Multiplicandus addirt, der oben steht. Diese Arbreit setzt man fort, bis man das Neunfache des Multiplicandus hat. Ja man thut auch wohl, wenn man noch das Neunfache zum Einfachen addirt: so sieht man sogleich, ob man in der Addition keinen Fehler begangen hat; denn dieß muß das Zehnfache, oder der gegebene Multiplicandus mit einer Nulle am Ende seyn (§. 30. a). Neben diesen Einfachen, Zwey- Dreyfachen rc. schreibt man die Zahlen 1, 2, 3, — bis 9 herab, damit man gleich weis, das Wievielfache jede Summe sey.

Soll man nun eine Zahl durch die andere multipliciren, so sieht man nur, mit welcher Ziffer der Multiplicandus soll multiplicirt werden, z. B. mit 4, 6, 7, schreib die Summen heraus, die neben 4, 6, 7 steht, und setze die letzte Ziffer der Summe unter die Ziffer des Multiplicators, die übrigen der Ordnung nach gegen die Linke. Sind alle Summen gehörig herausgeschrieben, so addirt man sie, wie sonst bey der Multiplication, zusammen.

Noch muß ich erinnern, weil es gleichviel ist, welchen Factor man zum Multiplicandus mache (§. 27.), daß man besser thue, wenn man jenen Factor zum Multipli-

candus nimmt, und aus ihm die Tabelle machet, der die höchsten Ziffern hat, — wenn nicht beyde Factoren gleich hohe Ziffern haben; denn alsdann darf die Tabelle nur bis zur höchsten Ziffer des andern Factors fortgesetzt werden, weil ich mit den Ziffern, die er nicht enthält, auch nicht zu multipliciren habe. Z. B. Es soll 55649 multiplicirt werden mit 39784. Hier ist es gleichviel, ob ich aus der ersten, oder zweyten Zahl die Tabelle mache, weil jede 9 enthält.

```
     39784
     25649
    ------
    358056
   159136
  238704
 198920
 79568
----------
1020419816
```

39784	1
79568	2
119352	3
159136	4
198920	5
238704	6
278488	7
318272	8
358056	9
397840	Probe.

5632 × 8965. Hier thut man besser, wenn man aus der zweyten Zahl die Tabelle macht; denn diese braucht sodann nur bis 6 fortgesetzt zu werden, weil dieß die höchste Zahl ist, mit der multiplicirt wird.

```
    8965
    5632
   -----
   17930
  26895
 53790
44825
--------
50490880
```

8965	1
17930	2
26895	3
35860	4
44825	5
53790	6

32. Noch

32. Noch bequemer, und schneller geht die Multiplication durch Beyhülfe der Neperianischen Stäbchen von statten; denn da darf man sich nicht erst eine Tabelle durch die Addition verfertigen; sondern diese Stäbchen nur nebeneinander hinlegen, wie ich zeigen werde, so steht die Tabelle schon fertig darauf.

Sie haben ihren Namen von ihrem Erfinder Neper. Man verfertiget sie von Metall, Elfenbein, Holz. Ich will ~~hier~~ eine Anweisung geben, wie sich ein Anfänger selbige mit sehr geringen Kosten selbst verschaffen könne. Er schreibe sich die Pythagorische Rechentafel viermal ab, so, wie er sie Fig. IIII. sieht, nur etwas größer, nachdem er nämlich die Stäbchen groß, oder klein haben will. Darauf lasse er sich von einem Tischler — Schreiner — 11 Stäbchen verfertigen, die so lange sind, als die Rechentafel, und so breit, als eine Columne. Er schneide hernach jede dieser vier Rechentafeln von oben bis unten in 10 Columnen. So wird er 40 solche Streifen alle von gleicher Länge, und Breite haben. Diese leimet man auf die hölzernen Stäbchen auf, daß jedes vier solche Columnen bekomme, auf folgende Art.

Stäbchen I.	1.	2.	3.	4.	VI.	6.	7.	8.	9.
II.	2.	3.	4.	5.	VII.	7.	8.	9.	0.
III.	3.	4.	5.	6.	VIII.	8.	9.	0.	1.
IIII.	4.	5.	6.	7.	IX.	9.	0.	1.	2.
V.	5.	6.	7.	8.	X.	0.	1.	2.	3.

Die Ziffern 1, 2, 3, ꝛc. bedeuten die Ziffern, die in jeder Columne oben stehen. Das eilfte Stäbchen überzieht man nur auf einer Seite, und schreibt die Ziffern darauf, wie man bey B sieht. Mit diesen Stäbchen kann man alle Multiplicationen, und Divisionen verrichten, wenn die

nemliche Ziffer in einer Zahl nicht öfters, als viermal vorkömmt. Und dieß erkleckt bey den gewöhnlichen Rechnungen. Zu größern müßte man sich noch mehrere solche Stäbchen verfertigen.

33. Soll man nun z. B. 370436 mit 5802 multipliciren, so mache man aus dem Multiplicandus die Tabelle auf folgende Art: Man lege die Stäbchen, derer obersten Ziffern 3, 7, 0, 4, 3, 6 sind, in der Ordnung nebeneinander hin, wie man Fig. V. sieht, und das Stäbchen B neben hin. Weil die erste Zahl des Multiplicators von hinten 2 ist, so schreib das neben 2 des Stäbchens B stehende Product in der nämlichen Reihe fort heraus, doch so, daß immer, wenn zwo Ziffern in einem länglichten Vierecke übereinander stehen, man sie zusammen addire, und wenn die Summe über 9 ist, die Ziffer zur Linken behalte, und sie zur folgenden Ziffer zähle. Eben so verfährt man bey den übrigen Ziffern des Multiplicators, und schreibt die Producte nach den Regeln der Multiplication an. Endlich addirt man alle besondere Producte zusammen.

```
    370436
      5802
    ------
    740872
  2963488
 1852180
----------
2149269672
```

Man sieht hier bey 2 auf dem Stäbchen B, daß davon hinein in der nemlichen Reihe stehe auf dem ersten Stäbchen 2. Das wird angeschrieben. Oben steht noch

noch 1. Dieses wird zu 6, das auf dem zweyten Stäbchen, aber in dem nämlichen Vierecke steht, addirt, giebt also 7. Und so verfährt man überall, wo zwo Ziffern in dem nemlichen länglichten Vierecke vorkommen.

Fünfter Abschnitt.

Von der Division unbenannter und benannter Zahlen.

34. Eine Zahl durch die andere theilen, **dividiren**, heißt finden, wie oft die andere sich von der ersten abziehen lasse (§. 21.), oder wie oft die zweyte in der ersten enthalten sey. Die Zahl, welche getheilt werden soll, wird der Dividend, die, durch welche sie getheilt werden soll, der **Divisor**, Theiler, die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist, **Quotus**, **Quotient**, oder Antheil genannt.

Ich könnte freylich durch wiederholte Abziehung finden, wie oft eine Zahl in der andern enthalten sey. Aber das würde größtentheils eine sehr langweilige Arbeit geben. Z. B. Zu finden, wie 7 in 2646 enthalten sey, müßte ich die Subtraction 378 mal wiederholen — denn so oft ist 7 darinn enthalten. Darum hat man auf eine bequemere Rechnungsart — Species — gedacht, die **Division**. Sie besteht darinn, daß man suchet, wie oft der Divisor in jeder Classe, aus denen der Dividend besteht, in dessen Millionen, Hunderttausendern, Tausendern, Hundertern rc. enthalten sey, und ihn gleich auf einmal von jeder so oft abzieht, als er sich abziehen läßt.

35. Der

35. Der Quotient zeigt an, wie oft der Divisor im Dividend steckt (vorh. §.). Z. B. $\frac{6}{2} = 3$, Nemlich so oft die Einheit im Quotient enthalten ist, so oft steckt auch der Divisor im Dividend. 1 ist hier in 3 dreymal enthalten, und eben so oft der Divisor 2 im Dividend 6; denn $2+2+2=6$. Folglich wenn ich den Divisor so oft nehme, als der Quotient Einheiten hat, das heißt, wenn ich den Quotient mit dem Divisor multiplicire (§. 27.) so muß der Dividend wieder hergestellt werden. In unserm Exempel ist $2 \times 3 = 6$. Die sicherste Probe also, ob ich recht dividirt habe, kann ich machen, wenn ich den Quotient, und den Divisor miteinander multiplicire, und dann der Dividend herauskömmt. Sonst hat man gefehlt.

Eben so kann man auch die Probe der Multiplication durch die Division machen, wenn ich nemlich das Product mit einem der Factoren dividire, muß der andere herauskommen.

36. Jede Zahl mit sich selbst dividirt, giebt 1 zum Quotienten; denn jede Zahl ist in sich selbst einmal enthalten. Z. B. $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{6}{6} = 1$, $\frac{364}{364} = 1$

37. Regeln der Division. I Schreib den Divisor so unter den Dividendus, von der Linken angefangen, daß die Zahl, unter die er zu stehen kömmt, entweder eben so groß, als der Divisor sey, oder die in

diesem

diesem Falle mögliche nächst größere. Z. B. Wenn 3624 dividirt werden soll durch 49, so darf man nicht anschreiben $\begin{array}{l}3624\\49\end{array}$; denn 49 ist größer als 36, worunter es steht. Auch nicht $\begin{array}{l}3624\\49\end{array}$; denn 3624 ist in diesem Falle nicht die nächst kleinere Zahl, als 49. Man muß also so anschreiben $\begin{array}{l}3624\\49\end{array}$. Und dann mache zur Rechten einen Strich, hinter welchem der Quotient zu stehen kömmt, nämlich so $\begin{array}{l|}3624\\49\end{array}$

Beweis dieser Regel. Man will durch die Division finden, wie oft der Divisor in jeder Classe des Dividends enthalten sey (§. 34.). Ist die obere Zahl kleiner, als die untere, so kann er gar nicht einmal darinn enthalten seyn. Ist sie gar zu groß, so kann man es auf einmal nicht übersehen, wie oft er darinn enthalten sey; weil das gewöhnliche Einmaleins nur bis hundert reicht. Ist die erste Ziffer des Dividends schon größer, als die erste des Divisors, so wird auch die Zahl, unter die der ganze Divisor geschrieben wird, größer seyn. Sind bey beyden die ersten Zahlen gleich, so muß man auch auf die folgenden in beyden sehen.

II. Sieh, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ober ihr stehenden Zahl enthalten sey. — Diese kann auch aus zwoen Ziffern bestehen. — Schreib die Ziffer, die dieses anzeigt, als Quotienten hinter den Strich. Z. B. im obigen Exempel sage $\begin{array}{l|}3624\\49\end{array}$

4 in

4 in 36 geht — nach dem Einmaleins — 9 mal. Also wird die Rechnung so stehen: 3624 ⎧ 9
49 ⎩

III. Mit diesem gefundenen Quotienten multiplicire den ganzen Divisor, und schreib das Product unter den Divisor, wie sonst bey der Multiplication. Hier sprich 3624 ⎧ 9
49 ⎩
441

Hier ist wohl zu merken, daß man den Divisor nicht allemal so oft nehmen darf, als das Einmaleins anzeiget; denn wie die folgende Regel sagen wird, muß das Product aus dem Divisor in den Quotienten von der ober dem Divisor stehenden Zahl abgezogen werden. Nimmt man nun den Divisor so oft, als er nach dem Einmaleins geht, so kömmt oft ein Product heraus, das größer, als die Zahl ist, von der es soll abgezogen werden. So kam das Produkt 441 heraus, das größer, als die ober ihm stehende Zahl 362 ist. Sieht man nun das, so muß man den Quotient um eine, oder mehrere Einheiten kleiner nehmen, bis das Product gerade so groß, oder etwas kleiner wird, als die ober ihm stehende Zahl. Schreibe ich 8 statt 9 im Quotienten, so giebt das wieder ein zu großes Product; denn 3624 ⎧ 8. Nur bey dem Quotienten 7 kömmt
49 ⎩
392
ein kleineres Product 3624 ⎧ 7
49 ⎩
343

Besonders wenn die erste Ziffer klein, und die darauf folgenden groß sind, darf man selten den Divisor so oft nehmen, als er geht. Eine kleine Uebung wird es bald zeigen, wie oft man ihn nehmen darf.

IIII. Dieß

IIII. Dieß gefundene Product subtrahire von der ober ihr stehenden Zahl. Hier

```
3624 ⎧ 7
49   ⎩
343
———
19
```

Wäre dieser Rest größer, als der Divisor, so hätte ich den Quotienten zu klein angenommen. Und eben das wäre, wenn der Rest dem Divisor gleich wäre; denn offenbar enthielte alsdann der Dividend den Divisor noch einmal. Und daraus ergeben sich die Gränzen, inner welchen der Quotus stehen muß. Das Product aus ihm, und dem Divisor darf nicht größer seyn, als die Zahl, wovon es abgezogen wird, und der Rest nach der Subtraction nicht größer, oder eben so groß, als der Divisor.

Beweis dieser drey Regeln. Man will durch die Division erfahren, wie oft der Divisor in allen Classen des Dividends enthalten sey, und versuchet also, wie oft er in dessen Millionen, Hunderttausendern, Tausendern rc. und in unserm Exempel, in dessen Tausendern, Hundertern, und Zehnern, oder was eines ist, in 3000 + 600 + und 20 enthalten sey. Nimmt man nun den Divisor so oft, als es angeht, und zieht dann das Product aus dem Quotient und Divisor vom Dividend ab, so erfährt man es; weil er nach der III. und IIII. gerade so oft abgezogen wird, als er darinn enthalten ist. Der Quotient 7, weil noch eine Zahl nach ihm folgen wird, gilt hier 70, und siebenzigmal ist auch 49 in 3000 + 600 + 20 enthalten; denn in 3000 steckt er 61 mal, und bleibt 11 übrig, in 600 + 11, oder 611 ist der Divisor enthalten 12 + 1 mal, und bleibt 23 übrig.

23 übrig. Setzt man noch 20+4 dazu, ſo bleibt 47, die ſich mit 49 nicht mehr ſo dividiren laſſen, daß ein Ganzes heraus kömmt. Nun ſind die zween Quotienten 61+12=73. Alſo iſt ihre Summe dem oben gefundenen Quotienten 70 ſchon beynahe gleich. Es fehlen nur noch 2, die durch die Fortſetzung der Diviſion noch kommen werden.

V. Hat der Dividend noch mehrere Ziffern, ſo ſetzt man die nächſte herab neben den Reſt hin, wenn einer geblieben iſt, und ſchreibt den Diviſor wieder darunter. Darauf wiederholt man die ganze Operation von der II. Regel an. Z. B. hier

```
3624 | 73
 49
343
----
 194
  49
 147
----
  47
```

Dieß muß alles ſo oft wiederholt werden, ſo viele Ziffer im Dividend noch folgen. Damit man aber unterſcheiden könne, welche Ziffern ſchon herabgeſetzt worden, bezeichnet man jede herabgeſetzte mit einem Punkte, wie hier 4.

a) Alle Diviſionsregeln ſind in dem lateiniſchen Verſe enthalten: Diuide, multiplica, ſubtrahe, pone, loca, das heißt: zuerſt dividire, wenn der Diviſor gehörig angeſchrieben worden, den Dividend, mul-

tipli-

tiplicire den gefundenen Quotient mit dem Divisor, das Product zieh vom Dividend ab, setze die nächste Ziffer des Dividends herab, und setze wieder den Divisor unter diesen neuen Dividend.

VI. Weil der hier gebliebene Rest 47 kleiner ist, als der Dividend, so läßt er sich nicht mehr so dividiren, daß der Quotient eine ganze Zahl gäbe. Man schreibt ihn also neben den Quotienten hin, zieht einen Strich unter ihm, und schreibt den Divisor darunter. So verfahrt man allemal, so oft ein Rest bleibt. Was dieß zu bedeuten habe, wird unten bey den Brüchen erklärt werden. Das ganz vollendete Exempel stünde also so.

```
3624  { 73 47
 49   {    --
343        49
---
 194
  49
 147
 ---
  47
```

Von der Probe über die Division ist §. 35. Meldung geschehen. Nur muß man noch merken, daß man den Rest, wenn einer geblieben ist, zum Product des Divisors, und Quotientens addiren muß, wenn der Dividend herauskommen soll. Z. B. hier

```
  73
  49
 ----
 657
292
-----
3577
  47
-----
3624
```

Besondere Regeln der Division. VI. Oft geschieht es, daß, wenn man nach der V. Regel zum Rest eine Ziffer des Dividends herabsetzt, das Ganze doch noch kleiner ist, als der Divisor. Folglich ist dieser nicht im Dividend enthalten. Dieses anzuzeigen setzt man im Quotus eine Nulle, und setzt wieder die nächstfolgenge Ziffer des Dividends herab. Ist die Zahl noch kleiner als der Divisor, so kömmt wieder eine Nulle in den Quotus, und dieß wird so oft wiederholt, bis endlich die Division einmal möglich wird. Z. B.

```
240072 | 10003
24     |
24
------
-00072
    24
    72
    --
     0
```

VII. Hat der Divisor am Ende eins, oder mehrere Nullen, so setzt man diese unter die letzten Ziffern des Dividends, und schneidet diese Ziffern sogleich von den übrigen ab, weil sie nicht dividirt werden dürfen. Bleibt dann nach geschehener Division ein Rest; den man

man als Bruch anschreiben müßte, so setzt man an diesen Bruch zur Rechten noch die abgeschnittenen Ziffern hin, und den ganzen Divisor darunter. Bleibt kein Rest, so werden nur die abgeschnittenen Ziffern als Bruch mit dem ganzen Divisor darunter angesetzt. Z. B.

```
543 | 2 ⎧ 21  182          14 | 6 ⎧ 1   6
25  | 0 ⎩     ---          14 | 0 ⎩    ---
50                250          14               140
--                             --
 43.                            0
 25
 25
 --
 18
```

Warum man so verfahren muß, ist leicht begreiflich. Die abgeschnittenen Zahlen würden am Ende doch als Bruch übrig bleiben, und die Nullen des Divisors würde man umsonst bey den übrigen Zahlen des Divisors öfters anschreiben, da sie durch was immer für eine Ziffer des Quotus multiplicirt allzeit Nullen geben würden.

VIII. Hat so wohl der Dividendus, als der Divisor Nullen, so schneidet man von beyden gleich viele ab, und betrachtet sie so, als wenn sie gar nicht da wären; setzt sie auch, wenn ein Rest als Bruch bleibt nicht mehr an. Z. B.

```
7843|00  [261 13/30
3   0|00 [
6
──
18
 3
18
──
 04
  3
  3
 ──
  1
```

Auch diese Verfahrungsart wird jedem einleichten. Hat der Dividend am Ende eins, zwo, oder drey Nullen, so ist er mit 10, 100, 1000 multiplicirt. Hat der Divisor eine, zwo, oder mehrere Nullen, so heißt das, ich soll den Dividend durch das Zehn — Hundert — oder Tausendfache des Divisors dividiren. Dieß geschieht aber, wenn ich vom Dividend eine, zwo, oder mehrere Nullen weglasse. Alles nach dem Decimalsystem.

Der Quotient muß allzeit um eine Ziffer mehr haben, als Ziffern des Dividends nach Anschreibung des Divisors übrig bleiben, unter denen keine Ziffer des Divisors steht. Z. B. 56854 [27 [muß einen Quotienten von vier Ziffern geben; denn unter 3 Ziffern steht keine Ziffer des Divisors. Durch die erste Theilung bekomme ich die erste Ziffer des Quotus, und weil noch drey Zahlen zum Herabsetzen da sind, für jeden Quotienten wieder eine Ziffer, folglich in allem vier. Wirklich ist auch der Quotient 2105 ohne den Bruch $\frac{19}{27}$.

Die

Die Probe der Division kann auch durch die Addition auf eine sehr schöne Art gemacht werden. Man addirt nemlich alle Producte aus dem Divisor, und Quotienten so, wie sie übereinander stehen, und auch den Rest, wenn einer da ist, so wie er unter dem letzten Product steht, zusammen, so muß der Dividend herauskommen. Das, was addirt werden muß, ist im folgenden Exempel mit * bezeichnet.

```
   740986 | 27443
   27
 * 54
   ----
   200
    27
 * 189
  -----
    119
     27
  * 108
   -----
     118
      27
   * 108
    -----
      106
       27
    *  81
      ----
    *  25
  --------
   740986
```

38. Weil jede Regel der Division schon bewiesen worden; damit der Beweis theilweise leichter übersehen werden kann, will ich nur einige Exempel zur Uebung beyfügen.

Fünf Ellen Tuch kosten 50 fl. Wie hoch kömmt eine? — 10 fl.

Sechs Kinder erben miteinander 17834 fl. Wie viel trifft eins? — $2972\frac{2}{6}$. Soll so ein Theil wieder unter mehrere Erben vertheilt werden, so theilt man ihn wieder mit der Anzahl dieser Erben.

44676 Personen verzehren jährlich 33775056 Pfund Getreid. Wie viele Pfunde im Durchschnitte kommen auf eine Person?

Es hat einer für 14 Schaff Getreid 120 fl. eingenommen. Wie hoch kam das Schaff?

Die Sonne ist von der Erde 377129145000 Pariser Schuhe entfernt. Der halbe Durchmesser der Erde beträgt 19611500 solche Schuhe. Wie viele Halbmesser ist also die Sonne von uns entfernt?

39. **Einige Vortheile bey der Division.** Der gewöhnliche, und sehr oft brauchbare Vortheil ist das **Halbiren**, anstatt eine Zahl nach den Regeln mit 2 zu dividiren. Man fängt dabey von vorne an. Ist die erste Zahl eine gerade, so setzt man ihren halben Theil unter den Strich. Ist sie eine ungerade, so läßt man einen Einser weg, und halbirt das übrige. Der weggelassene Einser wird zur folgenden Zahl als ein Zehner gezählt, und so wird er halbirt. Kömmt 1 in der Mitte allein vor, so setzt man im Halbirten eine Nulle, und zählt es hernach zur folgenden Zahl, als einen Zehner. Ist oben eine Nulle allein, so setzt man unten auch eine. Bleibt am Ende eine Nulle allein, d. i., wenn kein

kein 1 von der vorhergehenden Zahl übrig geblieben, so setzt man im Halbirten auch 0. Ist die letzte Zahl ungerade, oder 1, so halbirt man, wie sonst, und setzt noch ein $\frac{1}{2}$ dazu. So viele Regeln dieß zu seyn scheinen, so wird man sie doch nach einer kleinen Uebung leicht behalten. Hierzu dienen folgende Beyspiele

halb $\frac{642}{321}$ $\frac{1582}{791}$ $\frac{15006}{7503}$ $\frac{2780}{1390}$ $\frac{9531}{4765\frac{1}{2}}$ $\frac{4216}{2108}$

Wir wollen das dritte Beyspiel hersetzen. Sprich: Halb 15 ist 7, bleibt 1, halb 10 ist 5, halb 0 ist 0, halb 6 ist 3.

Soll man mit 4 dividiren, so halbirt man die Zahl, und das Halbirte noch einmal. u. s. w.

40. Soll man mit 10, 100, 1000 rc. dividiren, so schneidt man zur Linken nur so viele Zahlen ab, als der Divisor Nullen hat. Die übrigen Zahlen, weil 1 nichts dividirt, sind der Quotus, und die Abgeschnittenen der Bruch (§. 37. VII.). Zum Beyspiel

$\frac{649286}{1000} = 649 \frac{286}{1000}$.

41. **Die Division mit der Tabelle.** Diese ist nur alsdann vortheilhaft, wenn sowohl der Dividend, als Divisor aus mehrern Ziffern bestehen. Man machet, wie oben bey der Multiplication (§. 31.) gesagt worden, aus dem Divisor eine Tabelle. Auf diese Art bekömmt man den Divisor durch alle Ziffern von 1 bis 9 multiplicirt. Man darf also nur jedesmal den Divi-

dend mit diesen Producten vergleichen, und man wird gleich sehen, welches eben so groß, oder das nächst kleinere ist. In der Seiten Columne daneben steht der Quotus, den man anschreibt, und aus dessen Multiplication mit dem Divisor das Product entstanden ist. Uebrigens verfährt man, wie bey der gewöhnlichen Division. Der ganze Vortheil beym Gebrauche der Tabelle ist also dieser, daß man hier erstens gleich sieht, wie oft der Divisor im Dividend jedesmal enthalten ist, ohne es durch Versuche finden zu müssen; und zweytens, daß man sich die jedesmalige Multiplication des Quotus mit dem Divisor erspart. Nur darf man niemals vergessen, im Quotient eine Nulle zu setzen, so oft, und so lange der Dividend kleiner ist, als der Divisor, nach der VI. Divisionsregel. Ein Beyspiel soll die Sache erläutern. Es soll dividirt werden 46058627 mit 2976.

46058627 | 2976
2976 { $15476\frac{2051}{2976}$
* 2976
16298
* 14880
14186
* 11904
22822
* 20832
19907
* 17856
* 2051
46058627. Addirungsprobe §. 37.

2976	1
5952	2
8928	3
11904	4
14880	5
17856	6
20832	7
23808	8
26784	9
29760 Probe.	

42. Die

42. **Die Division mit den Neperianischen Stäbchen** (§. 32.). Nach der Ordnung der Ziffern im Divisor werden die mit den nemlichen Ziffern oben bezeichneten Stäbchen nebeneinander hingelegt, und das Stäbchen B darneben Fig. V, so hat man die fertige Tabelle aller Producte des Divisors mit den ersten neun Zahlen; nur muß man, wie bey der Multiplication mit diesen Stäbchen, die zwo in dem nämlichen länglichten Vierecke stehenden Ziffern zusammen addiren. Uebrigens verfährt man gerade so, wie bey der Division durch die Tabelle. Z. B. Es soll 2194269672 dividirt werden durch 370436. Die Tabelle aus dem Divisor in der Figur.

2149269672 [5802
370436
* 1852180
———————
2970896
* 2963488
———————
740872
* 740872
———————
2149269672 Probe durch die Addition

Sechster Abschnitt.

Von den vier Rechsnungsarten mit benannten ungleichartigen, oder vermischten Zahlen.

43. Ehe man mit ungleichartigen Zahlen (§. 8.) rechnen kann, muß man zuvor die verschiedenen Eintheilungen von Münzen, Gewichten, Maaßen, Zeit *rc.* wissen. Aber in diesem Stücke ist fast gar keine Ein-

förmigkeit. Nicht nur sind die Maaße selbst in verschiednen Ländern verschieden, sondern auch ihre Eintheilungen in kleinere Theile. Z. B. Der Eimer hält hier zu Lande 60 Maaße, anderer Orten 64, 32. Ein Schaff Getreid hält hier 8 Metzen, an andern Orten 6, oder 24. Etwas anders ist ein sächsischer, etwas anders ein baierischer Groschen, u. s. f. Es würde ganz unnütz seyn, wenn ich Anfänger hier mit weitläuftigen Tabellen über die verschiednen Arten von Maaßen, und Gewichten plagen wollte. Unstreitig sind soche Tabellen äußerst nothwendig, und giebt ihrer auch genug. Aber Anfängern sind sie noch entbehrlich; mit der Zeit werden Umstände sie nöthigen, sich darnach umzusehen. Ich werde hier nur solche Eintheilungen anführen, die entweder bey uns angenommen, oder überall die nämlichen sind.

Bey uns machen 8 Heller, oder 4 Pfenninge einen Kreuzer, drey Kreuzer einen Groschen, 20 Groschen, oder 10 Sechser, oder 5 Zwölfer einen Gulden, 1 fl. 30 kr. einen Reichsthaler, 2 fl. 24 kr. einen Conventionsthaler.

Der Tag — die Nacht mit einbegriffen — wird eingetheilt in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten. Die Minute in 60 Secunden, diese in so viele Terzen ꝛc.

Jeder Zirkel hat 360 Grade, der Grad 60 Minuten, die Minute 60 Secunden, diese so viele Terzen ꝛc.

Eine

Eine Meßruthe hat 10 Schuhe — sohst auch 12, oder 6 — der Schuhe 10 Zolle, der Zoll 10 Linien, die Linie 10 Punkte. Dieß ist das geometrische Maaß.

Aber der gemeine, oder Werkschuh hat 12 Zoll, der Zoll 12 Linien, die Linie 12 Punkte.

Der Centner hat 100 Pfunde, das Pfund 32 Lothe, das Loth 4 Quintl, oder Quintchen. Zwey Lothe machen eine Unze, 16 Unzen machen ein Pfund. 1 Quintl 4 Pfenninggewichte, und ein solches 15 Grangewicht.

Eine Mark Silber ist so viel, als ein halbes Pfund, oder 16 Loth, ein Loth 4 Quintl, ein Quintl 4 Denier.

Goldgewicht. Das Pfund 2 Mark, die Mark 24 Karate, ein Karat 4 Gran, ein Gran 3 Grän. Eine Unze 2 Loth, oder 3 Karate, ein Loth 18 Grän.

Ein Ballen Druckpapier hält 10 Riße, ein Riß 20 Bücher, ein Buch 25 Bogen.

Ein Ballen Schreibpapier hält 10 Riße, ein Riß 20 Bücher, ein Buch 24 Bogen. Vom Quadrat, und Cubikmaaß wird füglicher in der Geometrie gehandelt.

44. **Vermischte Zahlen zu addiren.** Man schreibt gleichartige Größen untereinander, und zwar Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner 2c. wie es sonst bey der Addition gewöhnlich ist, und addirt jede gleichartige Größen zusammen. Kömmt irgend bey

bey einer Classe eine Summe heraus, in der eine oder mehrere Einheiten der nächst höhern Classe enthalten sind, so addirt man diese Einheiten zu der folgenden Classe, und den Rest, wenn einer übrig geblieben, schreibt man allein unter die niedrigere. Z. B. Einer hat die Woche hindurch ausgegeben

Für Kost	4 fl.	12 kr.	— Hell.
Zimmergeld	—	42	—
Für den Trunk	3	30	—
Für Kleinigk.	—	18	4
Almosen	—	12	7
	8 fl.	55 kr.	3 Hell.

Sage von hinten angefangen 7 und 4 giebt 11 Heller, weil aber 8 Heller einen Kreuzer machen, schreib 3 als Rest unter die Classe der Heller, und zähle 1 zur Classe der Kreuzer, nemlich 1 und 2 ist 3, und 8 ist 11, und 2 ist 13, und 2 ist 15, schreib 5 behalt 1. 1 und 1 ist 2, und 1 ist 3, und 3 ist 6, und 4 ist 10, und 1 ist 11. in allem also wären 115. Aber 60 machen schon einen Gulden. Schreib also 5, d. i. 50 Kreuzer an, so bleiben 55 Kreuzer, und die 60, oder 1 Gulden wird zur folgenden Classe gezählt, nämlich 1 und 3 ist 4, und 4 ist 8 Gulden, wie die Summe zeigt.

Tag.	Stunde.	Minuten.	Secunde.
5	16	49	17
8	21	15	38
12	14	2	—
27	4	6	55

45. Ver=

45. **Vermischte Zahlen voneinander abzuziehen.** Man schreibt die verschiednen Classen untereinander, wie bey der Addition, und subtrahirt dann jede Classe des Subtrahendus von der gleichnamigen Classe des Minuendus, wie bey der gemeinen Subtraction. Ist aber ein Subtrahendus größer, als der ober ihm stehende Minuendus, so entlehne man eine Einheit von der nächst höhern Classe desselben. Addire diese, nachdem man sie in Theile der niedern Classe aufgelöset hat, wenn schon einige solche Theile da sind, zu denselben, oder setze sie, wenn keine da sind, in die niedere Classe des Minuendus, so wird die Subtraction allzeit angehen.

	Guld.	Grosch.	Kreuz.	Hell.
I. Einnahme	6	5	2	6
Ausgabe	5	8	1	7
Bleibt	—	17	0	7

II.	Cent.	Pfund.	Loth.	Quent.
	15	37	28	2
	5	66	30	3
	9	70	29	3

III.	Grad.	Minut.	Secund.
	245	—	—
	27	58	50
	217	1	10

Weil im letzten Exempel der Minuendus weder Minuten noch Secunden hat, entlehnet man einen

nen Grad, oder 60 Minuten, und von diesen wieder eine Minute, oder 60 Secunden Es wird also der Minuendus

	Grad.	Minuten.	Secunden.
	244	59	60
	27	58	50
Also ist der Rest	217	1	10

46. **Vermischte Zahlen zu multipliciren.** Vermischte Zahlen werden hier nur mit unbenannten Zahlen multiplicirt; denn von der Multiplication vermischter Zahlen mit andern Vermischten, z. B. wenn Ruthen, Schuhe, Zolle wieder mit Ruthen, Schuhen, und Zollen multiplicirt werden müssen, entstehen Größen einer andern Art, wovon in der Geometrie füglicher gehandelt wird. Also vermischte Zahlen mit unbenannten Zahlen kann man auf zweyerley Arten multipliciren. Entweder bringt man zuerst alle Classen zu der niedrigsten, und addirt sie in eine Summe, welche man mit der unbenannten Zahl multiplicirt, und das Product dann wieder durch die Division in seine Classen abtheilt; oder man multiplicirt von der niedrigsten Classe angefangen jede mit der unbenannten Zahl; und wenn dann Producte heraus kommen, welche Einheiten höherer Classen enthalten, zählt man diese wieder zu den höhern Classen. Exempel werden die Sache besser erläutern, als viele Regeln. Ich will zwey anführen, und jedes auf diese gedoppelte Art auflösen.

Von

Von einer Erbschaft hat jeder der fünf Erben 56 fl. 36 kr. 7 Hell. bekommen. Wie groß war die ganze Erbschaft? Man muß also den Antheil eines Erben mit 5 multipliciren. Verwandle also zuerst alles in Heller, mache die Gulden zu Kreuzer, und die Kreuzer zu Heller.

```
   56
   60
 ----
 3360   Zu diesen addire die 36 kr, und ver-
   36      wandle alles in Heller.
 ----
 3396
    8
 -----
27168   Zu diesen addire noch die 7 Heller
    7      und multiplicire die ganze Summe
 -----     mit 5.
27175
    5
------
135875 Heller.
```

135875 Heller. Nun mache aus diesen Hellern wieder Kreuzer, und dividire sie mit 8.

135875 / 8 = 16984 kr. und bleiben 3 hell. übrig.

Diese Kreuzer mache zu Gulden, oder dividire mit 60 giebt 283 fl. 4 kr. 3 hell.

Auf die zweyte Art.

```
56 fl.  36 kr.  7 hell.
 5       5      5
-----------------------
280     180     35
```

Nimmt man nun überall die Einheiten der höheren Classen aus den niedern weg, und zählt sie zu den höhern, so geben 35 Heller, 4 Kreuzer 3 Heller, 180 Kreuzer 3 fl., also ist die ganze Erbschaft 283 fl. 4 kr. 3 hell. wie oben.

II. Eine

II. Eine Communität braucht täglich 1 Eimer, 35 Maaß, und 1 Quart Bier. Wie viel braucht sie in einer Woche, oder 7 Tagen.

Auf die erste Art braucht sie täglich alles zu Quart gemacht 381 Quart. Folglich $381 \times 7 = 2667$ Quart in einer Woche, und diese Dividirt mit 4, weil 4 Quart eine Maaß machen, geben 666 Maaß und 3 Quart. Die Maaße zu Eimern gemacht geben endlich 11 Eimer, 6 Maaß, 3 Quart.

Auf die zweyte Art.	Eimer	Maaß	Quart.
	1	35	1
	7	7	7
	7	245	7
nach der Reduction —	11	6	3

47. **Die vermischte Zahlen dividiren.** Hier ist die kürzeste Methode, alles zur niedrigsten Classe zu bringen, und dann die Summe mit dem gegebenen Divisor zu dividiren; den Quotienten theilet man hernach wieder in die gegebenen Classen ab. Sollte der Divisor auch in vermischten Zahlen bestehen, so bringt man auch diese auf die niedrigste Classe des Dividends, und dividirt dann.

Z. B. Bey einer Erbschaft finden sich 2 Centner, 76 Pfund, und 24 Loth Silber. Es sind 6 Erben. Wie viel trifft einen?

Ein Centner giebt 100 Pfund. Die 76 dazu, macht 176 Pfund. Diese zu Lothen gemacht, und die 24 Lothe dazu, so sind es 5656 Lothe. Dividirt man die

die Summe mit 6, so treffen jeden Erben $942\frac{4}{6}$ Loth. Reducirt man die Lothe zu Pfunden, so bekömmt jeder 29 Pfund, $14\frac{4}{6}$ Loth.

Noch ein Beyspiel. Ein Mensch, der 135 Pfunde, 12 Loth wiegt, dünstet in einer Nacht 2 Pf. 12 Loth weg. In wie vielen Nächten wird er so viel verlieren, als seine ganze Schwere beträgt? Hier müssen 135 Pfunde, 12 Loth mit 2 Pfunden, 12 Lothen dividirt werden. Man mache den Dividend, und Divisor zu lauter Lothen, so bekömmt man 4332 dividirt mit 76. Der Quotient ist 57. In so vielen Nächten verliert also dieser Mensch so viel, als er schwer ist.

Da ich mich bey meinem Buche nur auf wenige Exempel einschränken muß, verlasse ich mich, auf die Lehrer, daß sie ihre jungen Leute in mehrern, und schwerern üben werden. Diese werden sodann keine Beschwerniß finden, das, was sie gerechnet haben, nicht nur in der Phisik, Astronomie ꝛc. sondern auch im gemeinen Leben anzuwenden.

Zweytes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit Ziffern in gebrochenen Zahlen.

Erster Abschnitt.

Vorläufige Kenntnisse.

48. Ein Bruch ist ein oder mehrere Theile der Einheit.

Die Zahlen bestehen aus Einheiten, welche Theile der Zehner, aus Zehnern, welche Theile der Hunderter, und so weiter sind. Eben so betrachte man die Einheit wieder als ein Ganzes, das aus mehrern kleinern Theilen zusammen gesetzt ist, oder vielmehr als in mehrere solche kleinere Theile zerstückelt, oder zerbrochen gedacht wird. Daher der Namen **Bruch**. Und dieser zeigt einen, oder mehrere Theile des Ganzen, oder der Einheit an.

a) Man schreibt die Brüche so: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{12}{17}$ Einige schreiben auch $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$. Die Zahl unter dem Striche zeigt an, in wie viele Theile man sich die Einheit getheilt vorstellet, oder sie giebt den Theilen ihren Namen. Z. B. $\frac{1}{2}$ zeigt an, das Ganze werde in zween, $\frac{2}{3}$, die Einheit werde in 3, $\frac{12}{17}$ die Einheit werde in 17 Theile getheilet. Darum wird die untere Zahl der **Nenner**, denominator, genannt, weil er die Theile benennet, in welche die Einheit getheilt wird. Die Zahl ober dem Strich sagt, wie viele solche benannte Theile es seyn, z. B. hier 1 halber Theil, 2 Dritttheile, 3 Viertheile, 12 Siebenzehntheile. Diese Zahl zählet die Theile vor, wie viel sie sind. Und heißt darum der **Zähler**, numerator.

b) Es ist also völlig gleichgiltig, ob ich z. B. vom Bruche $\frac{2}{3}$ — das gilt vom jeden andern — sage, er bedeute, zwo Einheiten müßten in drey Theile getheilt werden, oder eine Einheit werde in drey Theile getheilt, und zween solche Dritttheile bedeute der Bruch; denn ein dritter Theil der nem-

nemlichen Einheit ist dem andern gleich. Ob ich nun von jeder aus zwoen gleichen Einheiten einen dritten Theil, oder von einer Einheit der nemlichen Art zwey Dritttheile nehme, das läuft auf eines hinaus. Z. B. Der dritte Theil eines Guldens ist 20 kr. Also zween Dritttheile sind 40 kr. Habe ich hingegen zween Gulden, nehme von jedem den dritten Theil, so sind ja dieß wieder 40 kr.

49. Weil ein Bruch nur einen, oder mehrere Theile der Einheit, nicht aber die ganze Einheit enthält, so muß bey einem eigentlichen Bruche der Zähler allzeit kleiner, als der Nenner seyn. Ist der Zähler dem Nenner gleich, so enthält der Bruch gerade so viele Theile der Einheit, in so viele sie getheilt ist, das heißt, eine ganze Einheit. Z. B. $\frac{2}{2}$ sagt, das Ganze sey in zween Theile getheilt, und diese zween Theile enthalte der Bruch, folglich das Ganze. Also ist $\frac{2}{2} = 1, = \frac{3}{3}$ 1, $\frac{15}{15} = 1$ u. s. w. Das weis man auch aus der Division, daß jede Zahl in sich selbst einmal enthalten, und also $\frac{2}{2} = 1$ sey.

a) Daraus folgt auch, daß man aus jeder Zahl einen Bruch von einem beliebigen Nenner, machen könne. Ist es eine Einheit, so machet man nur den Zähler dem Nenner gleich. Z. B. Aus 1 soll ein Bruch gemacht werden, dessen Nenner 7, oder 32 seyn soll, so schreib $\frac{7}{7}$, oder $\frac{32}{32}$. Ist es eine andere Zahl, so multiplicire man sie nur mit dem gegebenen Nenner, und schreibe eben diesen darunter.

z. B. 2 soll ein Bruch werden mit dem Nenner 3, schreib $\frac{2 \times 3}{3}$ oder $\frac{6}{3}$. 3 soll ein Bruch werden mit dem Nenner 18. schreib $\frac{3 \times 18}{18} = \frac{54}{18}$.

b) Brüche, derer Zähler größer als der Nenner ist, sind **uneigentliche Brüche**, denn sie enthalten ein, oder mehrere Ganze. z. B. $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, oder ein Ganzes und zwey Drittel.

Die Brüche, wie die ganze Zahlen, sind entweder **unbenannt**, oder **benannt**. Bey jenen hat das Ganze, wovon sie Brüche sind; keinen Namen, bey diesen hat es einen. Unbenannte sind es z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ꝛc. Benannte $\frac{1}{2}$ Gulden, $\frac{2}{3}$ Schuh, $\frac{3}{4}$ Pfund. Erstere Brüche gelten einmal so viel, wie das anderemal, $\frac{1}{2}$ ist immer der halbe Theil einer Einheit. Bey benannten Zahlen ist der Werth verschieden, wie es die Ganzen sind, $\frac{1}{2}$ Gulden ist etwas anders, als ein $\frac{1}{2}$ Groschen, oder Heller.

51. Wenn das **nemliche Ganze** in mehrere Theile getheilt wird, müssen die Theile kleiner, und wenn es in wenigere getheilt wird, müssen sie größer werden.

Ob dieses schon für sich selbst jedem einleuchtet, will ich es doch sinnlich vorstellen, um es handgreiflich zu machen. Es sey Fig. III. die Linie AB = CD. Jene ist in zween, diese in drey gleiche Theile getheilt. Jedermann sieht, daß der halbe Theil der ersten, Am,

größer

größer ist, als der dritte Theil Cn der zweyten. Wenn ich zween ganz gleiche Laibe Brod habe, und schneide den ersten in zwey, den zweyten in vier gleiche Stücke, so müssen ja die Stücke des letztern kleiner seyn, als jene des ersten.

a) Weil also ein kleinerer Theil des **nemlichen Ganzen** weniger ist, und gilt, als ein größerer, so sagt man, **zween Brüche vom nemlichen Zähler verhalten sich umgekehrt, wie ihre Nenner.** Das heißt, derjenige Bruch hat einen **größern** Werth, der einen **kleinern** Nenner hat, und derjenige hat einen **kleinern** Werth, der einen **größern** Nenner hat; oder wie der Nenner wächst, nimmt umgekehrt der Werth des Bruches ab, und wie der Nenner abnimmt, nimmt umgekehrt der Bruch zu; denn wenn der Nenner wächst, wird das nemliche Ganze in mehrere Theile getheilt, und also der Werth der Theile kleiner, und nimmt er ab, so werden die Theile, und ihr Werth größer (§. 28. a)

Also ist $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$. Ueberall sind gleichviele Theile, nämlich überall einer; aber die vorhergehenden Theile sind immer größer, als die folgenden.

b) Eben so sieht man, daß es auf diese Art leicht sey, den Werth eines Bruches 2, 3, 4mal u. s. w. kleiner zu machen. Man darf nur seinen Nenner 2, 3, 4mal u. s. w. größer machen, oder was eines ist, mit 2, 3, 4 multipliciren; denn wie der Nenner wächst, eben so nimmt der Werth des Bruches ab. Z. B. Man soll den Werth des Bruches $\frac{1}{3}$ zweymal kleiner machen. $\frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$ dieser

 Bruch

Bruch ist zweymal kleiner, als $\frac{1}{3}$, und gilt nur halb so viel. $\frac{3}{4}$ fünfmal kleiner gemacht ist $\frac{3}{4\times5}=\frac{3}{20}$.

c) Es heißt aber einen Bruch 2, 3, 4mal u. s. w. kleiner machen nichts anders, als ihn mit 2, 3, 4 ꝛc. dividiren. Man lernet also hieraus, wie man Brüche mit ganzen Zahlen dividiren muß. Man multiplicirt nur den Nenner mit dem Divisor. Z. B. $\frac{2}{5}:3=\frac{2}{15}$

d) Eben so ist es begreiflich, daß man den Werth eines jeden Bruches um 2, 3, 4mal, u. s. w. größer machen könne, wenn man seinen Nenner mit 2, 3, 4 ꝛc. dividirt; denn wie der Nenner abnimmt, wächst der Werth des Bruches. Zum Beyspiel. Man soll den Werth des Bruches $\frac{1}{12}$ zweymal größer machen $\frac{1}{12:2}=\frac{1}{6}$. Dieser Bruch ist zweymal größer im Werthe, als $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{12:3}=\frac{1}{4}$ ist dreymal größer. $\frac{1}{12:4}=\frac{1}{3}$ ist viermal größer, als $\frac{1}{12}$.

52. Wenn das nemliche Ganze in gleiche Theile getheilt ist, und zween Brüche solche Theile enthalten, so ist der Werth desjenigen Bruches größer, der einen größern Zähler hat. Oder was eines ist, der Werth zweener Brüche vom nemlichen Nenner verhält sich, wie ihre Zähler.

Auch dieses ist an sich klar. Ich will es aber doch durch eine Figur versinnlichen. Fig. II. sind die Linien AB und CD in lauter gleiche Theile getheilt. Die erste enthält vier, die andere sechs solche gleiche Theile.

Es

Es ist augenscheinlich, daß die Linie CD mit sechs Theilen größer seyn muß, als die Linie AB mit vier solchen Theilen. Eben so ist auch $Af > Ae$, $Ag > Af$. u. s. w. Eben so ist es klar, wenn ein Laib Brod in 10 gleiche Theile zerschnitten wird, daß ein Bettler, dem ich fünf solche Zehntheile gebe, mehr bekomme, als ein anderer, der nur zwey, oder drey solche Theile bekömmt. Folglich ist $\frac{5}{10} > \frac{2}{10}, \frac{3}{10} > \frac{2}{10}$

a) Also kann man den Werth eines Bruches gleich 2, 3, 4mal, oder so oft man will größer machen, wenn man nur seinen Zähler mit 2, 3, 4 rc. multiplicirt. Wenn man $\frac{1}{12}$ auf diese Art größer machen will, so ist $\frac{1 \times 2}{12} = \frac{2}{12}$ zweymal, $\frac{3}{12}$ dreymal so groß, als $\frac{1}{12}$.

b) Den Werth eines Bruches, 2, 3, 4 mal größer machen heißt aber ihn mit 2, 3, 4 rc. multipliciren. Also sieht man, wie man Brüche mit ganzen Zahlen multipliciren muß. Man multiplicirt nemlich nur den Zähler mit der gegebenen Zahl.

c) Man kann auch den Werth eines jeden Bruches gleich 2, 3, 4 mal kleiner machen, wenn man seinen Zähler mit 2, 3, 4 rc. dividirt. Z. B. $\frac{10}{12}$ soll fünfmal kleiner gemacht werden, $\frac{10 : 5}{12} = \frac{2}{12}$. Dieser ist fünfmal kleiner, als $\frac{10}{12}$.

d) Es giebt zweyerley Arten, den Werth eines jeden Bruches so vielmal zu verkleinern, und zweyerley Arten, ihn so vielmal zu vergrößern, als man will. Nämlich ihn zu **verkleinern** dividire man entweder seinen Zähler, oder multiplicire seinen Nenner mit der gegebenen Zahl. Z. B. $\frac{6}{18}$ soll um dreymal kleiner werden. Entweder schreib $\frac{6:3}{18} = \frac{2}{18}$, oder $\frac{6}{18 \times 3} = \frac{6}{54}$.

Den Werth zu **vergrößern** multiplicire entweder den Zähler, oder dividire den Nenner mit der gegebenen Zahl. Z. B. $\frac{6}{18}$ soll zweymal größer werden. Entweder schreib $\frac{6 \times 2}{18} = \frac{12}{18}$, oder $\frac{6}{18:2} = \frac{6}{9}$. Die Vergrößerung, oder Verkleinerung durch die Multiplication geht allzeit an, nicht aber durch die Division; weil sich nicht jeder Nenner, oder Zähler durch jede gegebene Zahl ohne Rest dividiren läßt. Z. B. $\frac{2}{7}$ kann nur durch die Multiplication dreymal größer gemacht werden, nemlich $\frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$, und so auch nur auf diese Art 3 mal kleiner, nemlich $\frac{2}{7 \times 3} = \frac{2}{21}$. Aber weder der Nenner, 7, noch der Zähler, 2, kann durch 3 ohne Rest dividirt werden.

53. Bisher haben wir nur die Werthe zweener Brüche miteinander zu vergleichen gelernet, die entweder den nemlichen Nenner, oder den nemlichen Zähler haben, um anzugeben, wessen Werth größer, oder kleiner ist, und diese allgemeine Regel gefunden: Wenn die

die Nenner gleich sind, gilt jeder Bruch mehr, der einen größern Zähler hat. Wenn die Zähler gleich sind, gilt jener mehr, der einen kleinern Nenner hat. $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Allein wenn in zween Brüchen weder Nenner, noch Zähler gleich sind, wie läßt sich da finden, wessen Bruches Werth größer, oder kleiner sey? Sie müssen nothwendig einerley Zähler, oder Nenner haben. Man braucht also zuvor eine Anweisung, wie man ihnen einerley Nenner, oder Zähler geben kann, ohne daß ihr Werth verändert wird; denn wenn der Werth verändert würde, vergliche man nicht die gegebenen, sondern ganz andere Brüche, welches nicht geschehen darf. Sonst dürfte man nur, um gleiche Zähler zu erhalten, einen Zähler durch den andern, oder um gleiche Nenner zu erhalten, einen Nenner durch den andern multipliciren. Z. B. $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$. $\frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}$, und $\frac{7 \times 2}{8} = \frac{14}{8}$ gäbe gleiche Zähler, und $\frac{2}{5 \times 8} = \frac{2}{40}$ und $\frac{7}{8 \times 5} = \frac{7}{40}$ gäbe gleiche Nenner. Aber $\frac{14}{5}$ wäre größer, und $\frac{2}{40}$ kleiner als $\frac{2}{5}$ (§. 51. 52.). Eben so verhielte es sich mit den Brüchen $\frac{7}{8}$, $\frac{14}{8}$, $\frac{7}{40}$. Wenn man also zween Brüche miteinander ihrem Werthe nach ver-

gleichen will, muß man eine Methode haben, ihnen gleiche Zähler, oder Nenner zu geben, ohne daß ihr Werth verändert wird. Hierzu führt folgender Lehrsatz.

54. **Der Werth eines Bruches wird nicht verändert, wenn man dessen Zähler, und Nenner mit der nemlichen Zahl multiplicirt.**

Denn wenn ich einen Bruch eben so vielmal wieder kleiner mache, so vielmal ich ihn größer gemacht habe, so behält der Bruch seinen alten Werth. Das geschieht aber, wenn ich den Zähler, und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicire; denn durch die Multiplication des Zählers mit dieser Zahl wird der Werth des Bruches so vielmal größer, als diese Zahl anzeigt (§. 52. a). Durch die Multiplication des Nenners wird er wieder um so vielmal kleiner (§. 51. b). Also bleibt der alte Werth des Bruches.

Z. B. Man multiplicire den Nenner, und Zähler des Bruches $\frac{2}{5}$ mit 3, giebt $\frac{6}{15}$. Multiplicirt man zuerst den Zähler, so ist $\frac{6}{5}$ dreymal so groß als $\frac{2}{5}$. Multiplicirt man jetzt auch den Nenner, so ist $\frac{6}{15}$ dreymal kleiner, als $\frac{6}{5}$. Also $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

a) Da nach §. 27. b das nemliche Product heraus kömmt, wenn man aus zwoen Zahlen die erste mit der zweyten, oder die zweyte mit der ersten multiplicirt, so ist

es

es klar, daß zwey gleiche Producte heraus kommen, wenn ich den ersten Zähler mit dem zweyten, und den zweyten mit dem ersten multiplicire. Eben das gilt auch von den Nennern. Es ist also leicht zweenen Brüchen, wenn man sie bloß ihrem Werthe nach miteinander vergleichen will, einerley Zähler, oder Nenner zu geben, ohne daß ihre Werthe verändert werden. Will man einerley Zähler, so multiplicire man mit dem Zähler des ersten den Zähler und Nenner des andern, und mit dem Zähler des zweyten den Zähler und Nenner des ersten. Will man gleiche Nenner, so verfahre man eben so mit den Nennern. Z. B. $\frac{2}{5}$, und $\frac{7}{8}$ sollen erstens gleiche Zähler, und zweytens gleiche Nenner ohne Veränderung ihres Werthes bekommen. $\frac{2\times7}{5\times7}$, $\frac{7\times2}{8\times2}$ giebt $\frac{14}{35}$ $\frac{14}{16}$, gleiche Zähler, $\frac{2\times8}{5\times8}$, $\frac{7\times5}{8\times5}$ giebt $\frac{16}{40}$, $\frac{35}{40}$ gleiche Nenner, und doch ist der Werth keines Bruches verändert worden, weil man überall den Zähler, und Nenner mit der nemlichen Zahl multiplicirt hat. Man sieht auch jetzt, daß $\frac{14}{16} > \frac{14}{35}$, und $\frac{35}{40} > \frac{16}{40}$, oder $\frac{7}{8} > \frac{2}{5}$ ist.

Zweyter Abschnitt.

Wie man Brüche unter einen Nenner bringt.

Man braucht im Rechnen niemal gleiche Zähler, wohl aber Nenner, und zwar nicht nur, um Brüche ihrem Werthe nach vergleichen zu können, sondern auch um sie zu addiren, oder voneinander zu subtrahiren. Da nun Anfänger, wenn sie Brüche unter einen Nenner bringen sollen,

len, Schwierigkeiten finden, und meistentheils nur mechanisch verfahren, ohne den Grund davon einzusehen, glaube ich, es werde nicht überflüßig seyn, nach allem, was ich schon gesagt habe, ihnen noch auf eine andere Art zu zeigen, was es eigentlich sey, Brüche unter den nemlichen Nenner zu bringen.

55. Es sey Fig. VI. die Linien AB, CD, EF, GH, alle gleich lang, und AB in CD in zween, in EF in vier, in GH in acht gleiche Theile getheilt. Soll ich nun die Linie AB halb nehmen, so ist es ja gleich viel, ob ich von CD einen, oder von EF zween, oder von GH vier gleiche Theile nehme; denn $\frac{1}{2}$ AB = C1 = E2 = G4, oder vier Theile von GH = zween Theilen von EF = einem Theile von CB, oder um so vielmal die Theile in GH kleiner sind, als in CB, um so vielmal mehr nehme ich.

Eben so ist es, wenn ich einen halben Gulden bezahlen soll. Es ist gleichviel, ob ich ihn mit 30 Kreuzern, oder 10 Groschen, oder 5 Sechsern bezahle, und $\frac{1}{2}$ Gulden ist $= \frac{30}{60}$, oder $\frac{10}{20}$, oder $\frac{5}{10}$ eines Gulden, oder was eines ist $\frac{1 \times 30}{2 \times 30} = \frac{1 \times 10}{2 \times 10} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5}$, wo überall der Zähler und Nenner des Bruches mit der nemlichen Zahl multiplicirt wird, und doch der alte Werth des Bruches $\frac{1}{2}$ bleibt.

Wenn ich nun von der Linie AB, Fig. VII. $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{2}$ wegnehmen soll, so geht das so lange nicht an, so lange man sie entweder nur in zween Theile, wie bey a, oder nur in fünf Theile, wie bey b theilen will, sondern man

muß

muß sie in zehn Theile abtheilen, wie bey c. Man sieht hier gleich, daß $\frac{2}{5}$ von b eben so viel sind, als $\frac{4}{10}$ von c, und daß $\frac{1}{2}$ von a so viel sey, als $\frac{5}{10}$ von c. Es kömmt also, wenn man zween, oder mehrere Brüche unter einen Nenner bringen will, alles darauf an, daß man sie ohne Veränderung ihres Werthes gleichartig mache, oder die größern Theile, aus denen sie bestehen, in kleinere gleichartige verwandle, wie man hier aus $\frac{2}{5}$, und $\frac{1}{2}$ lauter gleichartige Theile, nemlich [illegible]/10, und $\frac{5}{10}$ gemacht hat.

56. **Zween oder mehrere Brüche unter einen Nenner zu bringen.** Man multiplicire den Zähler und Nenner eines Bruches durch die Nenner aller übrigen Brüche. Auf diese Art wird eines jeden Bruches Nenner, und Zähler mit den nemlichen Zahlen multiplicirt. Also bleibt dessen Werth unverändert (§. 54.); zugleich bekommen alle Brüche den nemlichen Nenner; weil alle Nenner miteinander multiplicirt werden. Z. B.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ oder } \frac{1\times 3}{2\times 3}, \frac{2\times 2}{2\times 3}, \text{ oder } \frac{3}{6}, \frac{4}{6} \text{ oder } \frac{3, 4}{6}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \text{ oder } \frac{2\times 4\times 5,\ 3\times 3\times 5,\ 4\times 3\times 4}{3\times 4\times 5}$$

$$\text{oder } \frac{40,\ 45,\ 48}{6}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \text{ oder } \frac{40,\ 60,\ 30,\ 24}{120}$$

$$\frac{2}{9}, \frac{12}{25} = \frac{50}{225}, \frac{108}{225}$$

a) Oft

a) Oft kömmt man durch einen Vortheil geschwinder zum Ziele. Man suche die kleinste Zahl, welche durch jeden der gegebenen Nenner dividirt werden kann. Diese ist der neue Nenner für alle Brüche. Diesen Nenner dividire man durch den vorigen Nenner eines jeden Bruches, und multiplicire durch den Quotienten eines jeden Bruches Zähler, so bekömmt man auch die Zähler der neuen Brüche. Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{2}{8}$. Die kleinste Zahl, die durch alle Nenner ohne Rest dividirt werden kann, ist 24, also der neue Nenner. $\frac{24}{2} = 12, \frac{24}{4} = 6, \frac{24}{6} = 4, \frac{24}{8} = 3.$ Also sind die neuen Brüche $\frac{1 \times 12}{24}, \frac{3 \times 6}{24}, \frac{4 \times 4}{24}, \frac{2 \times 3}{24}$, oder $\frac{12,\ 18,\ 16,\ 6.}{24}$

b) Ist der größte Nenner der gegebenen Brüche selbst schon die kleinste Zahl, welche durch alle gegebene Nenner ohne Rest dividirt werden kann, so verfährt man, wie zuvor. Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{8}$ ist $\frac{1 \times 4}{8}, \frac{3 \times 2}{8}, \frac{2}{8}$, oder $\frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{2}{8}$.

c) Allein wie findt man die kleinste Zahl, die durch alle Nenner dividirt werden kann? Man verfährt auf folgende Art. 1. Man schreibe alle Nenner in einer solchen Columne untereinander. Wenn aber der nemliche Nenner öfters vorkömmt, schreibt man ihn nur einmal. 2. Wenn sich ein Nenner durch den andern ohne Rest dividiren läßt, lasse man den Divisor weg. * 3. Wenn sich zween Nenner durch die nemliche Zahl dividiren lassen, so dividire man einen damit, und mit den gefundenen Quotienten multi-

* Wenn aber gleich der Dividend einen der folgenden Nenner wieder dividirt, muß man ihn jezt doch stehen lassen.

multiplicirt man den andern Nennen. Dieß wiederholt man, so oft es zwischen zween Nennern angeht. 4. Bleiben noch Nenner übrig, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, so wird mit denselbigen die vorher durch die Multiplication gefundene Zahl multiplicirt. Das Product ist der gemeinschaftliche Nenner. Die Zähler der Brüche werden gefunden, wie schon in diesem §. gesagt worden. Folgendes Exempel wird alles erläutern.

Es sollen folgende Brüche unter einen Nenner gebracht werden:

$$\frac{7}{12},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{9}{16},\ \frac{4}{5},\ \frac{11}{12},\ \frac{11}{14}.$$

12
8
4
16
5
14. Nach der ersten Regel bleibt 12 von $\frac{11}{12}$ weg.

12
8
16
5
14. Nach der zweyten Regel bleibt 4 weg.

24
16
5
14. Nach der dritten Regel $\frac{12}{4} = 3,\ 3 \times 8 = 24.$

48
5
14. Nach der dritten Regel $\frac{24}{8} = 3,\ 3 \times 16 = 48.$

336
5. Nach der dritten Regel $\frac{48}{2} = 24,\ 24 \times 14 = 336.$

68.

1680. Nach der letzten Regel $336 \times 5 = 1680$.

Dieß ist der gemeinschaftliche Nenner, sucht man jetzt auch die Zähler, so findt man

$$\frac{980,\ 1470,\ 420,\ 945,\ 1344,\ 1540,\ 1320.}{1680}$$

Noch ein Exempel $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$

$$\frac{48,\ 54,\ 40,\ 42,\ 27,\ 36.}{72}$$

Dritter Abschnitt.

Wie man Brüche verkleinert.

59. Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn Nenner, und Zähler durch die nemliche Zahl dividirt werden; denn um so viel der Bruch durch die Division des Zählers kleiner wird, um so viel wird er durch die Division des Nenners wieder größer (§. 52.)

a) Also kann man **Brüche verkleinern**, d. h. in kleinern Zahlen ausdrücken, ohne daß ihr Werth verändert wird, wenn man den Zähler, und den Nenner mit der nemlichen Zahl dividirt.

b) Diese Operation trägt vieles zur Bequemlichkeit im Rechnen bey; denn Brüche, die in kleinern Zahlen ausgedrückt sind, lassen sich viel bequemer addiren, subtrahiren, multipliciren, und dividiren. Nur will es nicht immer angehen, daß man Zähler, und Nenner mit der nemlichen Zahl ohne Rest dividiren kann. Es giebt Zahlen, die man durch keine andere Zahl, als durch sich selbst, oder durch die Einheit dividiren kann. Man nennt sie nume-

numeros primos, wie z. B. 3, 5, 7, 11, 13, und noch öfter haben zwo Zahlen keinen gemeinschaftlichen Theiler, die man numeros primos inter se nennet, wie z. B. 7 und 8. Darum lassen sich die allermeisten Brüche nicht verkleinern, oder man kann keinen gemeinschaftlichen Theiler des Zählers, und Nenners finden.

58. **Brüche zu verkleinern.** Mit dem gemeinschaftlichen Theiler dividire den Zähler, so bekömmst du den neuen Zähler, und dann dividire auch den Nenner. Dieß giebt den neuen Nenner. Um aber den gemeinschaftlichen Theiler zu finden, wenn es einen giebt, theile man den Nenner des gegebenen Bruches durch den Zähler. Bleibt kein Rest, so ist der Zähler der gemeinschaftliche Theiler z. B. $\frac{17}{34} = \frac{1}{2}$. Bleibt aber ein Rest, so theile wieder den vorherhenden Divisor durch den Rest. Bleibt nochmal, oder öfters auf diese Art ein Rest, so theile allzeit den vorhergehenden Divisor durch den Rest, bis zuletzt nichts, oder 1 übrig bleibt. Geschieht das erste, so ist der letzte Divisor der gemeinschaftliche Theiler; bleibt aber 1, so läßt sich der Bruch nicht verkleinern. Z. B. Der Bruch $\frac{91}{119}$ soll verkleinert werden.

$$\begin{array}{r|l} 119 & \\ 91 & 1 \\ \hline 28. & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 91 & \\ 28 & 3 \\ 84 & \\ \hline 7. & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & \\ 7 & 4 \\ \hline 28 & \end{array}$$

Also ist 7, der letzte Divisor, der gemeinschäftliche Theiler, und der Bruch wird $\frac{13}{17}$. Es soll der Bruch $\frac{37}{71}$ kleiner gemacht werden.

$$\begin{array}{r|l} 71 & \\ 37 & 1 \\ \hline 34. & \\ 37 & \\ 34 & 1 \\ \hline 3. & \\ 34 & \\ 3 & 1 \\ \hline 4 & \\ 3 & 1 \\ \hline 1. & \end{array}$$

Also läßt sich der Bruch nicht verkleinern, weil zuletzt 1 übrig bleibt.

Beweis des ersten. Weil zuletzt nichts übrig bleibt, mißt der letzte Divisor den vorhergehenden, dieser mißt wieder den vorhergehenden, und so weiter hinauf. Also muß der letzte Divisor alle messen, oder ein Theiler sowohl des ganzen Zählers, als Nenners seyn.

Beweis des zweyten. Weil zuletzt 1 übrig bleibt, mißt der letzte Divisor den vorhergehenden nicht, oder der vorhergehende ist nicht genau ein Vielfaches des letzten. Und da der vorhergehende wieder seinen vor-

hergehenden, u. s. w. mißt, sind alle vorhergehende Divisors keine Vielfache des letzten, und werden also auch nicht von ihm gemessen.

Noch ein paar Exempel $\frac{22}{55} = \frac{2}{5}$, $\frac{1022}{4179} = \frac{146}{597}$. Hingegen $\frac{13}{17}$, $\frac{61}{83}$, $\frac{2635}{5482}$ lassen sich nicht verkleinern.

59. Indessen weil diese Art den gemeinschäftlichen Theiler zu suchen etwas mühsam, und doch oft vergeblich ist, will ich einige Vortheile zeigen, die uns oft dieser Mühe überheben können.

Erstens. Alle Brüche, deren leztes Ziffer im Zähler, und Nenner eine gerade Zahl ist, 1, 2, 4, 6, 8, 0, lassen sich mit 2 verkleinern; weil alle vielfache von 2 sich mit einer solchen geraden Zahl endigen, wie man aus dem Einmaleins weis. Man theile also den Zähler, und Nenner zugleich so oft durch 2, als es angeht, bis endlich entweder im Zähler, oder im Nenner eine ungerade Zahl, 1, 3, 5, 7, 9, kömmt. Z. B. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. $\frac{24}{48} = \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6}$. Weiter läßt sich der Bruch durch diesen Vortheil nicht verkleinern. $\frac{144}{360} = \frac{72}{180} = \frac{36}{90} = \frac{18}{45}$

Zweytens. Alle Brüche, deren Zähler, und Nenner sich mit 5, oder einer Nulle endigen, lassen sich mit 5 verkleinern; weil alle Vielfache von 5 sich entweder mit 5 oder einer Nulle endigen, wie aus dem Ein-

 mal-

maleins erhellet. Also müssen Nenner und Zähler vielfache von 5 seyn. Z. B.

$$\frac{35}{75}=\frac{7}{15} \cdot \frac{10}{25}=\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{40}=\frac{2}{8} \cdot$$

Haben Zähler und Nenner am Ende Nullen, so läßt man in beyden gleich viele weg, denn das ist eben so viel, als wenn man beyde mit 10, 100, 1000 ꝛc. dividirte.

Drittens. Wenn man die Ziffern des Zählers, und die des Nenners zusammen addirt, und kömmt beyderseits eine Zahl heraus, die drey, oder ein vielfaches von drey ist, z. B. 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 ꝛc. so lassen sich Zähler und Nenner durch 3 verkleinern; denn ein jeder solcher Zähler, oder Nenner ist selbst ein vielfaches von 3. Z. B.

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \cdot \frac{18}{45}=\frac{1+8}{4+5}=\frac{9}{9}$ durch die Addition. Also

$\frac{6}{15}$ oder $\frac{2}{5}$.

$\frac{123}{456}$ durch die Addition $\frac{6}{15}$ oder $\frac{41}{152}$.

Auf diese Art können oft Brüche noch verkleinert werden, die sich nicht mehr halbiren lassen.

Vierter Abschnitt.

Addition, Subtraction, Multiplication, und Division der Brüche.

Addition.

60. Entweder soll man Brüche ohne Ganze, oder Brüche mit Ganzen zusammen addiren.

Brüche ohne Ganze.

I. Regel. Haben die Brüche nicht einerley Nenner, so bringe man sie unter einen Nenner; weil man ungleichartige Theile nicht in eine Summe addiren darf. (§. 18.). Brüche aber, welche verschiedene Nenner haben, bestehen aus ungleichartigen Theilen (§. 48. a).

II. Regel. Man addire die Zähler, und schreibe den gemeinschaftlichen Nenner darunter; denn so findt man, wie viel gleichartige Theile in allen Brüchen zusammen enthalten sind.

III. Regel. Ist der gefundene Zähler größer, als der Nenner, so dividire man jenen durch diesen. Der Quotient giebt die darinn enthaltenen Ganzen (§. 49. b). Wenn etwas übrig bleibt, schreibe man es als Rest, und den Nenner darunter

Brüche mit Ganzen.

Man addire die Ganzen zusammen, und nach den gegebenen Regeln auch die Brüche. Kommen durch die Addition der Brüche wieder Ganze, so addire man auch diese zu den übrigen.

Beyspiele.

$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$. $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{6}{7}=\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{9}=\frac{30+27+20}{45}=\frac{77}{45}=1\frac{32}{45}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{30+20+15+12}{60}=\frac{77}{60}=$

$1\frac{17}{60}$

$2\frac{3}{4}+3\frac{1}{7}+6\frac{5}{8}=11+\frac{42+8+35}{56}=$

$11+\frac{85}{56}=12\frac{29}{56}$

$2\frac{1}{3}+5\frac{2}{5}=7+\frac{5+6}{15}=7\frac{11}{15}$.

Ein Kaufmann hat in einer Woche verkauft von einem Stück Tuch $4\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{8}$, $6\frac{5}{8}$ Ellen. Wie vielle Ellen macht das? 20 Ellen.

In einer Verlassenschaft findt sich vorräthiges Silber, 15 ℔. $\frac{2}{32}$, 9 ℔. $\frac{7}{32}$ 24 ℔. $\frac{15}{32}$, 3 ℔. $\frac{28}{32}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{17}{32}$. Giebt $53\frac{1}{2}$ ℔.

Wollte man aber auch die ganzen Zahlen wie Brüche ausdrücken, so multiplicire man sie durch den Nenner des Bruches, und addire das Product zum Zähler des Bruches.

ches. Z. B. $3\frac{5}{6} = \frac{3\times 6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$
(§. 49. a)

Subtraction.

61. Hier soll man wieder entweder Brüche von Brüchen abziehen, oder Brüche von Ganzen, oder Ganze und Brüche von Ganzen, und Brüchen subtrahiren.

Brüche von Brüchen abziehen.

I. Regel. Haben die Brüche nicht einerley Nenner, so bringe man sie unter einen Nenner.

II. Regel. Man ziehe den Zähler des Subtrahendus ab, und unter den Rest schreibe man den gemeinschaftlichen Nenner.

Brüche von Ganzen abziehen.

Regel. Nimm ein Ganzes, und drücke es als einen Bruch aus mit dem nemlichen Nenner, den der Bruch hat. Dieß geschieht, wenn du den Zähler dem Nenner gleich machest (§. 49.). Von diesem neuen Bruche zieh den gegebenen ab, wie bey II. Regel gelehrt worden.

Brüche, und Ganze von Brüchen, und Ganzen abziehen.

Regel. Zieh die Ganze von den Ganzen, und die Brüche von den Brüchen ab, und wenn der abzuziehende Bruch größer ist als der Minuendus, ent-

lehne wieder ein Ganzes, mache es zu einem Bruche vom nemlichen Nenner, den der Subtrahendus hat, und addire den Zähler dieses neuen Bruches zum Zähler des Minuendus, von dieser Summe läßt sich dann der Zähler des Subtrahendus abziehen.

Beyspiele.

$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$. $\frac{7}{9} - \frac{1}{6}$ oder $\frac{14}{18} - \frac{3}{18} = \frac{11}{18}$.

$2 - \frac{1}{2}$ oder $1 + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. $4 - \frac{3}{7}$, oder $3\frac{7}{7} - \frac{3}{7} = 3\frac{4}{7}$.

$5\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ oder $1\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$.

$12\frac{1}{5} - 9\frac{7}{8} = 3\frac{1}{5} - \frac{7}{8}$ oder $3\frac{8}{40} - \frac{35}{40} = 2\frac{48}{40} - \frac{35}{40} = 2\frac{13}{40}$

$6\frac{51}{63} - 2\frac{8}{9} = 3\frac{58}{63}$.

Ein Kaufmann hat von einem Stücke Tuch von $35\frac{3}{4}$ Ellen verkauft $7\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, $6\frac{3}{8}$ Ellen, oder $16\frac{1}{8}$ Ellen. Wie viel Tuch bleibt ihm? $19\frac{5}{8}$ Ellen.

Das

Das Schmalz sammt dem Kübel wiegt $65\frac{1}{4}$ ℔. Der Kübel allein $15\frac{1}{2}$ ℔. Wie viel Schmalz war im Kübel? $50\frac{1}{4}$ ℔.

Ein Faß mit Caffee wiegt sporco nemlich Faß und Caffee zusammen $11\frac{7}{8}$ Centner. Netto nemlich der Caffee ohne das Faß $11\frac{1}{6}$ Centner. Wie schwer ist das Faß? $70\frac{5}{6}$ ℔.

62. Bey benannten Zahlen kann man oft der Addition, oder Subtraction der Brüche gar überhoben seyn, wenn man die Brüche zuvor auflöset, oder ihren Werth suchet; denn da bekömmt man oft lauter ganze Zahlen zum addiren. oder subtrahiren.

Man löset aber einen Bruch auf, oder findt seinen Werth, wenn man mit der Anzahl der Theiler eines Ganzen, in welchen Theilen man den Werth finden will, den Zähler multiplicirt, und das Product mit dem Nenner dividirt. Z. B. Welche ist die Summe von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ Gulden? Weil ein Gulden 60 Kreuzer hat, ist $\frac{2 \times 60}{3} = 40$ kr. und $\frac{3 \times 60}{4}$ 45 kr. Also $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ fl. 85 kr., oder 1 fl. 25 kr. Bey der Subtraction verfährt man eben so. $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ fl. ist $45 - 40 = 5$ Kreuzer.

Ich will hier gelegentlich noch einige Beyspiele von Auflösung der Brüche geben.

Was gelten $\frac{2}{3}$ eines Duodecimalschuhes? $\frac{2 \times 12}{3}$ $= 8$ Zolle. $\frac{5}{8}$ eines Vierundzwainzigers $= \frac{5 \times 24}{8}$ $= 15$ Kreuzer.

Oft bleibt nach der ersten Auflösung noch ein Bruch übrig. Will man nun auch den Werth dieses Bruches noch wissen, so löse man ihn auf eben gesagte Art in die nächstkleinern Theile des Ganzen auf. Z. B.

$\frac{3}{7}$ eines Guldens sind $\frac{3 \times 60}{7} = 25\frac{5}{7}$ kr. $\frac{5}{7}$ eines Kreuzers, weil der Kreuzer 4 Pfennige hat, machen $\frac{5 \times 4}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ Pfenninge, und $\frac{6}{7}$ Pfenninge $\frac{6 \times 2}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$ Heller heraus. Also ist $\frac{3}{7}$ Gulden 25 kr. 2 Pfennige $1\frac{5}{7}$ Heller.

$\frac{9}{11}$ eines Ducatens sind 4 fl. 55 kr. 1 Pfenning $1\frac{7}{11}$ Heller.

$\frac{10}{13}$ einer Ruthe von 12 Schuhen sind 9 Schuhe 2 Zoll, $2\frac{10}{13}$ Lin.

$\frac{3}{5}$ eines Groschen sind $4\frac{4}{5}$ Heller.

Multiplication.

63. Wenn ich ganze Zahlen mit ganzen Zahlen multiplicicire, muß das Product nothwendig größer werden, als jeder der Factoren. Z. B. $2 \times 3 = 6$, wo 6 größer ist als 2 und 3. Natürlich muß mehr heraus kommen, wenn ich eine Zahl öfters nehme, als wenn ich sie einmal nehme.

Der Multiplicandus muß so oft genommen werden, als der Multiplicator Einheiten enthält (§. 27. a). Ein eigentlicher Bruch enthält aber keine ganze Einheit,

heit, sondern nur einige Theile derselben (§. 48.). Also darf auch, wenn Ganze, oder ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt wird, das Product nicht größer als der Multiplicandus seyn, sondern kleiner; denn ich nehme ja den Multiplicandus nicht einmal ganz, sondern nur so vielmal, als der Bruch anzeigt, durch den ich ihn multipliciren soll. Es ist nemlich leicht begreiflich, daß $\frac{2}{3}$ von 5, oder von $\frac{3}{4}$ weniger seyn muß, als 5, oder $\frac{3}{4}$ ist; denn ein Theil von 5, oder $\frac{3}{4}$ ist ja weniger, als das ganze 5, oder $\frac{3}{4}$. Hieraus wird das Parador begreiflich, daß, wenn Ganze oder Brüche durch Brüche multiplicirt werden, das Product kleiner werden muß, als der Multiplicandus ist.

Aber auch, wenn ich den Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicire, muß das Product kleiner werden, als dieser Multiplicator; denn erstens ist es eins, welche Zahl, die ganze, oder gebrochene, ich zum Multiplicator nehme (§. 27. b). In diesem Falle aber, wenn ich den Multiplicandus an die Stelle des Multiplicators setze, kömmt, wie eben gesagt ist worden, ein kleineres Product heraus, als der Multiplicandus ist — in dieser Voraussetzung eine ganze Zahl — und zweytens heißt einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren nur, diesen Bruch so oft nehmen, als die ganze Zahl Einheiten enthält. Es können aber einige Theile der Einheit, auch so oft genommen, als der Multiplicator Einheiten hat, nicht so viele Einheiten ausmachen, als der Multiplicator enthält. Eine Einheit

heit z. B. sechsmal genommen macht freylich sechs Einheiten. Aber der halbe, dritte, vierte Theil einer Einheit sechsmal genommen kann auch nur sechs halbe, dritte, vierte Theil der Einheit enthalten. Also ist das Product aus einem Bruche der Einheit mit Ganzen multiplicirt, weniger, als diese Ganzen.

Brüche mit Brüchen multipliciren.

64. Regel. Multiplicire die Zähler miteinander; dieß giebt den neuen Zähler: und die Nenner miteinander; dieß giebt den neuen Nenner.

Ganze mit Brüchen multipliciren, oder Brüche mit Ganzen.

Weil es eins ist, welche Zahl ich für den Multiplicandus, oder Multiplicator gelten lasse, so multiplicire man den Zähler mit der ganzen Zahl (§. 52. b) und schreibe den Nenner darunter.

Ganze und Brüche mit Ganzen, und Brüchen multipliciren.

Die Ganzen bring mit dem Bruche, bey welchem sie stehen, unter einen Nenner (§. 56.) und addire sie mit dem dabeystehenden Bruche in eine Summe; dann multiplicire die Zähler der beyden Brüche, und hernach auch die Nenner miteinander. Was herauskömmt, ist ihr Product.

In den Fällen, wenn nach geschehener Multiplication ein Zähler heraus kömmt, der größer ist, als der

der Nenner, muß man die darinn enthaltenen Ganzen besonders anzeigen (§. 60. III.).

Beweis. Es soll $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden. — Eben der nemliche Beweis gilt auch, wenn $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll, und ist allgemein.

Sollte der Bruch $\frac{2}{3}$ durch 3, den Zähler des zweyten Bruches, multiplicirt werden, so wäre das Product $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3}$ (§. 52. b). Allein dieß Product ist offenbar zu groß, weil ich $\frac{2}{3}$ nicht mit 3, sondern mit dem vierten Theil von 3, oder mit $\frac{3}{4}$ multipliciren soll. Also ist es viermal so groß, und muß nur den vierten Theil davon haben, oder $\frac{6}{3}$ um viermal kleiner machen. Dieß geschieht, wenn ich den Nenner desselben, 3, mit 4 multiplicire (§. 51. c), oder $\frac{6}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$. Es ist also $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, oder die Zähler werden miteinander, und so auch die Nenner miteinander multiplicirt. So auch

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Bey-

Beyspiele.

$\frac{2}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.

$\frac{5}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12}$

$\frac{2}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$

$3 \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ $\quad 7 \times \frac{3}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$

$12 \times \frac{5}{9} = \frac{60}{9} = 6\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} \times 15 = \frac{30}{3} = 10$

$2\frac{3}{4} \times 3\frac{5}{7} = \frac{11}{4} \times \frac{26}{7} = \frac{286}{28} = 10\frac{3}{14}$

$4\frac{9}{17} \times 13\frac{7}{8} = \frac{77}{12} \times \frac{111}{8} = \frac{8547}{136} = 62\frac{115}{136}$.

Dieses Verfahren nennet man sonst auch, **Brüche nehmen**, oder **den Werth eines Bruches von einem Bruche finden.** Wenn man nemlich zu wissen verlangt, der wievielte Theil **des Ganzen** ein Bruch eines Bruches sey. Z. B. Wie viel $\frac{2}{3}$ eines $\frac{3}{4}$ Gulden seyn, oder $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Gulden. Und in der That ist $\frac{3}{4}$ Gulden 45 kr. $\frac{2}{3}$ von 45 sind aber 30 kr. $= \frac{1}{2}$ Gulden. Der wievielte Theil des Tages ist $\frac{2}{3}$ einer Stunde? Eine Stunde ist $\frac{1}{24}$ des Tages. Also $\frac{1}{24} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$. Und wirklich ist $24 \times 60'$, oder $1440 : 40'$ ($\frac{2}{3}$ einer Stunde) $= 36$, oder der sechs und dreyßigste Theil des Tages.

Division.

65. Eine Zahl durch eine andere dividiren heißt finden, wie oft diese in jener enthalten ist (§. 34.). Der Quotient zeigt an, wie oft sie enthalten ist, oder der wievielte Theil des Dividends der Divisor ist. Je größer der Dividend in Ansehung des Divisors ist, desto größer muß der Quotient seyn, denn die nemliche Zahl ist ja in einer größern öfter enthalten, als in einer kleinern.

a) Bey der Division ganzer Zahlen durch Ganze, muß der Quotient nothwendig kleiner seyn, als der Dividend, weil der Quotient nur ein, oder mehrere Theile des Ganzen Dividends, aber nicht allen Theilen des Dividends gleich ist. Erst wenn ich den Quotus mit dem Divisor multiplicire, kömmt der Dividend wieder heraus (§. 35.). So ist $\frac{6}{3} = 2$, und $2 < 6$, und der Divisor 2 ist der dritte Theil des Dividends.

b) Aber bey der Division ganzer Zahlen durch einen Bruch muß der Quotient größer werden, als der Dividend, so widernatürlich dieß auch zu seyn scheint; denn jeder eigentliche Bruch ist kleiner, als die Einheit, folglich auch in der Einheit mehr, als einmal enthalten, und also auch in allen Einheiten des Dividends öfter, als einmal. Also muß der Quotient, der anzeigt, wie oft der Bruch in dem ganzen Dividend enthalten ist, größer, als der Dividend seyn. So ist z. B. $\frac{1}{2}$ in 1 schon zweymal enthalten, weil zwey Halbe, oder $2 \times \frac{1}{2}$ erst ein Ganzes ausmachen, oder $\frac{2}{2} = 1$. 2 Ganze sind vier, 3 sechs Halbe. Folglich $1 : \frac{1}{2} = 2$, $2 : \frac{1}{2} = 4$, $3 : \frac{1}{2} = 6$. Hier ist der Quotient überall größer, als der Dividend. Und so ist es auch bey der Division anderer Ganzen durch andere Brüche.

66. Auch

66. Auch wenn ein Bruch durch einen Bruch dividirt wird, ist der Quotient größer, als der Dividend; denn wenn der Divisor auch nur einmal darinn enthalten ist, so ist der Quotient schon (1). Aber (1) ist ja größer, als jeder eigentliche Bruch, und der Dividend ist ein eigentlicher Bruch, wie man voraussetzt. Ist aber der Divisor auch nicht einmal im Dividend enthalten, so ist doch der Quotient nothwendig größer, als der Dividend; denn alsdann ist der Divisor größer, als der Dividend, sonst wäre er wenigstens einmal in ihm enthalten. Ist aber der Divisor größer, als der Dividend, so enthält dieser nur einen Theil des Divisors, oder der Dividend ist nur ein Theil des Divisors, und zwar ein kleinerer Theil des nemlichen Ganzen, als der Divisor. Da also der Quotient anzeigt, der wievielte Theil des Dividends der Divisor ist, muß der Quotient größer seyn, als der Dividend.

67. Es können Brüche durch Brüche, Ganze durch Brüche, Brüche durch Ganze, Ganze und Brüche durch Ganze und Brüche dividirt werden.

Brüche mit Brüchen dividiren.

Regel. Kehre den Divisor um, d. i. schreib den Nenner in die Stelle des Zählers, und diesen an die Stelle des Nenners. Itzt multiplicire den Zähler dieses neuen Bruches mit dem Zähler, und den Nenner mit dem Nenner des Dividends. Das Product ist der Quotient.

Ganze

Ganze mit einem Bruche dividiren.

Regel. Schreib unter die Ganzen einen Einser, daß sie die Gestalt eines Bruches bekommen, und verfahre sodann nach der vorhergehenden Regel.

Einen Bruch durch Ganze dividiren.

Schreib unter die Ganzen einen Einser, und weil hier die Ganzen der Divisor sind, kehre diesen uneigentlichen Bruch um. Dann verfahre nach der ersten Regel.

Ganze und Brüche durch Ganze und Brüche dividiren.

Gieb den Ganzen die Nenner der Brüche, die dabey sind, und addire zu ihren Zählern die Zähler der Brüche. So giebt es zween neue uneigentliche Brüche. Mit diesen verfahre nach der ersten Regel.

Beweis der ersten Regel. Es soll $\frac{2}{3}$ dividirt werden durch $\frac{3}{4}$. (Der Beweis wäre der nemliche, wenn $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ sollte dividirt werden. Ist also allgemein. Nur ist er mit Ziffern für Anfänger faßlicher). Wenn ich $\frac{2}{3}$ nur mit 3, den Zähler des Divisors, dividiren müßte, wäre der Quotient $\frac{2}{3 \times 3}$ (§. 51. c), denn so machte ich den Bruch $\frac{2}{3}$ dreymal kleiner. Ich soll ihn aber nicht mit 3, sondern mit $\frac{3}{4}$ dividiren. Also ist dieser Quotient viermal zu klein. Um also den rechten Quotienten zu bekommen, muß ich ihn viermal

größer machen. Dieß geschieht aber, wenn ich seinen Nenner mit 4 multiplicire (§. 52. b), folglich muß ich den Zähler des Dividends mit dem Nenner, und den Nenner mit dem Zähler des Divisors multipliciren, d. i. ich muß den Divisor umgekehrt anschreiben, und so Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multipliciren.

Beweis der übrigen Regeln. Ganze, und Brüche zusammen addirt, geben einen unächten Bruch, der so viel gilt, als zuvor die Ganzen, und die Brüche besonders galten (§. 49. a). Also verfährt man auch eben so, wie bey eigentlichen Brüchen.

Beyspiele.

$\frac{1}{3} : \frac{1}{8}$. Schreib $\frac{1}{3} \times \frac{8}{1} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

$\frac{5}{6} : \frac{2}{5}$, oder $\frac{5}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$

$12 : \frac{1}{2}$ oder $\frac{12 \times 2}{1} = 24$. Es ist auch ganz gewiß, daß $\frac{1}{2}$ in 12 vier und zwainzigmal enthalten ist.

$15 : \frac{2}{7}$, oder $\frac{15}{1} \times \frac{7}{2} = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} : 4$, oder $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$2\frac{3}{5} : 4\frac{3}{8}$ oder $\frac{13}{5} \times \frac{8}{35} = \frac{104}{175}$

$9\frac{2}{7} : 6\frac{2}{9}$, oder $\frac{65}{7} \times \frac{9}{56} = \frac{585}{392}$

Wie viele Vierlingkerzen lassen sich aus 33 ℔ Wachs machen? $33 : \frac{1}{4} = \frac{33}{1} \times \frac{4}{1} = 132$.

Wir

Wie viele Conventionsthaler werden aus einer feinen Mark Silber, oder 16 Loth geschlagen? Ein Thaler muß $1\frac{3}{5}$ Loth feines Silber haben, ohne das Kupfer, mit dem es legirt ist. $16 : 1\frac{3}{5}$, oder $\frac{16}{1} \times \frac{5}{8} = 10$. Darum steht auf diesen Thalern: X eine feine Mark. Es wigt aber so ein Thaler 2 Lothe. Also ist $\frac{2}{5}$ Loth Kupfer dabey.

Wie viel Vierundzwainziger schlägt man aus einer feinen Mark? Einer hat $\frac{4}{15}$ Loth Silber. $16 : \frac{4}{15}$ oder $\frac{16}{1} \times \frac{15}{4} = 60$. Es steht auf den Vierundzwainziger 60 eine feine Mark. So giebt auch eine feine Mark auch 120 Zwölfer, und 240 Sechser.

Aus 15 Pfund Silber sollen Leuchter gemacht werden, jeder von $\frac{3}{4}$. Wie viel giebt es? $\frac{15}{1} : \frac{3}{4}$ oder

$$\frac{15 \times 4}{3} = 20.$$

Ein Acker ist $4\frac{2}{5}$ Ruthen breit, $5\frac{3}{4}$ Ruthen lang. Der wievielte Theil der Länge ist die Breite? $\frac{23}{4} : \frac{22}{5}$ oder $\frac{23}{4} \times \frac{5}{22} = 1\frac{27}{88}$.

Fünfter Abschnitt.

Von den Decimalbrüchen überhaupt.

Ein Decimalbruch heißt derjenige, dessen Nenner die Einheit mit einem, oder mehrern Nullen ist. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{7}{1000}$. Ich habe schon §. 13 einen Begriff von diesen Brüchen gegeben.

Ehe ich mehr von diesen Brüchen sage, muß ich ihren Nutzen zeigen, so viel er sich hier schon einsehen läßt, damit man desto williger an ihre Erlernung gehe. Wer so oft, wie ich, gehört hat: **Wozu nützt mir das?** wird mir es wohl nicht übel nehmen, daß ich hier den Anfängern zu gefallen etwas vom Nutzen der Decimalbrüche vorausschicke.

a) Die arithmetischen Operationen mit diesen Brüchen sind viel einfacher, und leichter, als mit gemeinen Brüchen. Man verfährt bey ihrer Addition, Subtraction ꝛc. wie wenn es lauter ganze Zahlen wären bis auf eine Kleinigkeit, die man den Augenblick faßt.

b) Es ist nur ein Spielwerk, solche Brüche unter einen Nenner zu bringen.

c) In der Geometrie pflegt man sich der Decimalbrüche zu bedienen, wodurch alle Rechnungen sehr erleichtert werden. Da hält die Ruthe 10 Schuhe, der Schuh 10 Zolle, der Zoll 10 Linien.

d) Es lassen sich die gemeinen Brüche leicht in Decimalbrüche verwandeln. Und wenn gleich nicht jeder Decimalbruch den Werth des gemeinen Bruches genau angiebt, so kann man diesem doch so nahe kommen, als man will, daß man keinen merklichen Fehler mehr begeht. Auf diese Art kann man also die gemeinen Brüche vermeiden, welches bey vielen Rechnungen ein großer Gewinn ist.

69. Wir haben §. 13 gesagt, daß hinter den einfachen Einheiten der Werth der Ziffern von der Linken zur Rechten immer zehnfach abnehme. Folglich drückt jede folgende Ziffer Zehntheile der vorhergehenden aus. Daher der Name **Decimalbrüche**.

a) Die

a) Die erste Ziffer hinter der Einheit, oder dem Decimalzeichen (, oder .) §. 13 gilt also Zehntheile, die zweyte Hunderttheile, die dritte Tausendtheile ꝛc. der Einheit. Z. B. 23,543 heißt drey und zwanzig Ganze, 5 Zehntheile, 4 Hunderttheile, 3 Tausendtheile, oder $\frac{5}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{3}{1000}$. Man läßt aber den Nenner gar weg, weil man ihn leicht hinzudenken kann; denn er ist allzeit 1 mit so vielen Nullen, als nach dem Decimalzeichen Ziffern folgen, auch die Nullen mitgezählt. So ist z. B. 2, 26 so viel, als $2\frac{26}{100}$, oder als $2\frac{2}{10} + \frac{6}{100}$.

b) Jeder Decimalbruch kann auf zweyerley Art ausgesprochen werden. Z. B. 5,39 kann ich aussprechen, 5 Ganze, 3 Zehntheile, 9 Hunderttheile, oder fünf Ganze, neun und dreyßig Hunderttheile.

c) Auch hier, wie bey ganzen Zahlen, muß an die Stelle, wo keine Ziffer steht, eine Nulle gesetzt werden, um den nachfolgenden Ziffern ihren Werth zu erhalten. So darf ich z. B. $2\frac{3}{100}$ als Decimalbruch nicht schreiben 2, 3, sondern 2, 03; denn das erste wäre nur $2\frac{3}{10}$, da es doch $2\frac{3}{100}$ seyn muß. So ist doch auch $6\frac{7}{10000}$ als Decimalbruch zu schreiben 6, 0007.

Wenn keine Ganzen bey den Decimalbrüchen sind, schreiben einige eine Nulle an ihre Stelle. Z. B. $\frac{4}{100}$ = 0, 04 . $\frac{7}{10}$ = 0, 7. Andere schreiben schlechterdings, 04, oder , 7. Andere endlich setzen statt des Decimalzeichens Punkt . 0 , 7, oder , 0 . 7.

70. Wenn man einem Decimalbruch, so viel man will, Nullen am Ende anhängt, oder wegnimmt, so bleibt sein Werth unverändert; denn um so viel mehr, oder weniger Nullen bekömmt auch der eingebildete Nenner (§. 69. a). Es ist also gerade so viel, als

wenn man den Zähler, und Nenner eines gemeinen Bruches mit der nemlichen Zahl multiplicirt, und dividirt, wo dann allzeit der Werth unverändert bleibt (§§. 54. 57.). Eine, zwo, drey Nullen zu einer Zahl hinzusetzen heißt sie mit 10, 100, oder 1000 multipliciren, sie weglassen heißt mit diesen Zahlen dividiren. (§. 30. a. 37. VII.)

a) Also ist es leicht, zween, oder mehrere Decimalbrüche unter einen Nenner zubringen. Z. B. 0, 43, und 0, 00068. Setze dem einen nur so viele Nullen am Ende bey, als der anderere mehr Ziffern, die Nullen mitgerechnet, hat, nemlich 0,43000, 0,00068; denn wenn man die Nenner unterschreibt, ist jener $\frac{43000}{100000}$, dieser $\frac{68}{100000}$.

b) Es ist auch 0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000 = 0,50000 2c.

c) Es ergiebt sich auch leicht aus diesem Satze, welcher von zween Decimalbrüchen größer, als der andere sey. Man bringe sie nur auf die ersagte Art unter einen Nenner. Dann da sieht man, daß derjenige größer ist, der einen größern Zähler hat (§. 52.). So ist z. B. 0,5 > 0,49; denn aus jenem Bruch wird $\frac{50}{100}$, aus diesem $\frac{49}{100}$, 0,50 > 0,49. So auch 0,5 > 0,499999 ins unendliche; den, 0,500000 > 0,499999.

d) 0,499999 kömmt dem wahren Werth von 0,5 näher, als 0,49999, und dieses wieder näher, als 0,4999, oder 0,499, oder 0,49, denn 0,5 = 0,500000. Zu diesem kömmt näher hin 0,499999, als 0,49999, oder 0,4999, oder 0,499, oder 0,49. Das erste ist von 0,500000 nur unterschieden um $\frac{1}{1000000}$, das zweyte um $\frac{1}{100000}$, das dritte um $\frac{1}{10000}$, das vierte um $\frac{1}{1000}$, das fünfte um $\frac{1}{100}$.

e) Nichts=

e) Nichtsdestoweniger darf man meistentheils in Decimalbrüchen von mehrern Ziffern am Ende eine oder mehrere weglassen, ohne daß man einen beträchtlichen Fehler begeht; denn bey vielen Größen ist es genug, wenn man sie nur bis auf Zehn — Hundert, oder Tausendtheile berechnet. Was kann in gar vielen Fällen daran liegen, ob ich auch die kleinern Theile weis, oder nicht? Es sey 0,6289 ein Bruch von einem Pfund Eisen. Dafür darf ich wohl schreiben 0,6, oder 0,62, 8 und 9 kann ich weglassen. $\frac{8}{1000}$, oder $\frac{2}{10000}$ eines Pfundes Eisen haben ja keinen beträchtlichen Werth. Aber 0,6289 von einem Pfunde Gold hätte schon mehr zu bedeuten. Da dürfte ich kaum die letzte Ziffer 9 weglassen. So oft man aber die Rechnungen abzukürzen eine, oder mehrere Ziffern am Ende eines Decimalbruches wegläßt, giebt man darauf Achtung, ob die erste wegzulassende Ziffer größer, oder kleiner, als 5 ist. Ist sie größer, so vermehrt man die letzte noch stehenbleibende Ziffer um eines, um den Schaden in etwas zu ersetzen. Z. B. Man wollte vom Decimalbruche 4,9862, die letzten zwo Ziffern weglassen, so schreib anstatt 4,98, 4,99, weil die erste wegzulassende Ziffer 6, also größer, als 5 ist. Man erreicht den wahren Werth des Bruches nicht, wenigstens in den meisten Fällen, wenn man alle Decimalziffern beybehält. Aber doch ist der Fehler geringer im ersagten Falle, wenn man die letzte Ziffer um eins vermehrt, als wenn man ohne diese Vermehrung einige Ziffern wegwirft. Es bleibe obiges Exempel 4,9862. Es sey dies der wahre Werth, oder beynahe. Lasse ich die letzten zwo Ziffern, 62, weg, so fehle ich um $\frac{62}{10000}$, oder um noch mehr; schreib ich aber anstatt 4,98, 4,99, so ist der Bruch um $\frac{38}{10000}$ zu groß, denn 4,9862 — 4,9800 = 62. Hingegen 4,9900 — 4,9862 = 38. Ich fehle also im letzten Falle per excessum nicht so viel, als ich im er-

 sten

sten per defectum fehlen würde. So wird man auch bald durch Rechnung erfahren, daß, wenn die erste wegzulassende Zahl kleiner, als fünf ist, die Vermehrung des letzten bleibenden Ziffers um eins, den Fehler vergrößern würde, und daß, wenn die erste wegzuwerfende Ziffer 5 ist, man immer fast einen gleichen Fehler begehe, ob man die letzte bleibende um eins vermehrt, oder nicht vermehrt.

71. Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, sie mögen nun Reste einer Division, oder bloß für sich bestehende Brüche seyn.

Schreib zum Zähler des Bruches so viele Nullen, als dir beliebt, dividire mit dem Nenner, wie sonst, diesen Dividend. Der Quotient ist ein Decimalbruch, dessen Werth drückt entweder den Werth des gemeinen Bruches vollkommen aus, wenn nach einmal, oder öfters wiederholter Division kein Rest bleibt, oder doch kömmt der Decimalbruch dem wahren Werthe des Bruches immer näher, je länger die Division fortgesetzt wird. Je genauer man aber diesen Werth braucht, desto länger muß die Division fortgesetzt werden, indem man immer dem Reste eine Nulle anhängt. Man kann aber, wie wir bald sehen werden, die Division oft bald endigen, weil man die Ziffern des Quotienten, die noch kommen würden, sogleich gewiß voraussehen kann. Ich will hier nur ein einziges Exempel ausführlich hersetzen, damit man die Verfahrungsart sehe, von den übrigen nur die Quotienten, woraus sich die Eigenschaften verschiedner Decimalbrüche zeigen

werden.

werden. Man soll den gemeinen Bruch $\frac{4}{7}$ in einen Decimalbruch verwandeln.

```
40 ⎧ 0,5714285 ꝛc.
 7 ⎨
35 ⎩
——
 50
  7
 49
 ——
  10
   7
   7
  ——
   30
    7
   28
   ——
    20
     7
    14
    ——
     60
      7
     56
     ——
      40
       7
      35
      ——
       5
```

Es ist überflüßig die Division noch weiter fortzusetzen, da der nemliche Rest 4 und 5 wieder kömmt, müssen auch die nemlichen Quotienten wiederkehren. Also ist 0,5714285 ꝛc. beynahe so viel als $\frac{4}{7}$, ja sogar 0,57, oder 0,571 kömmt dem wahren Werthe schon nahe (§. vorherg. e).

$\frac{1}{2}=0,5$; denn in der That ist 0,5, oder $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}=0,3333$ ins unendliche

$\frac{1}{4}=0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}=0,2=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}=0,16666$ ins unendliche

$\frac{1}{7}=0,\dot{1}42857\dot{1}42$ ꝛc. Bey 1 fangen die nemlichen Zahlen zu kommen an, wie sie im Anfange kommen, und so würden sie ohne Ende wiederkehren.

$\frac{1}{8}=0,125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{9}=0,1111$ ins unendliche.

Weil zum Zähler eines jeden Bruches, der in einen Decimalbruch verwandelt werden soll, am Ende eine Nulle beygesetzt wird, so kann nur ein solcher Bruch genau verwandelt werden, dessen Nenner 2, 5, oder ein Vielfaches dieser Zahl ist; denn nur 2, oder 5 können einen Zähler genau theilen, der sich mit einer Nulle endiget. Hier drücken nur die Decimalbrüche 0,5, 0,25, 0,2, 0,125 den Werth des Bruches genau aus; weil die Nenner, oder Divisoren 2, 2×2, 5, $2\times2\times2$ waren. Alle andere Nenner geben entweder lauter gleiche Zahlen, wie bey dem Bruche $\frac{1}{3}$, oder es kommen doch bald lauter gleiche Zahlen, wie bey $\frac{1}{6}$, und allen Vielfachen von 3, oder es kommen nach einigen Decimalstellen die nemlichen Ziffern, wie bey $\frac{1}{7}$.

72. **Einen Decimalbruch in einen gemeinen zu verwandeln.** Man schreibe den Decimalbruch sammt seinem zugehörigen Nenner an: so hat man einen gemeinen Bruch. Diesen kann man auch verkleinern, wenn die letzte Ziffer des Zählers entweder eine gerade

gerade Zahl, oder eine Nulle, oder 5 ist, so wie wir eben gesagt haben; sonst aber niemal, weil der Nenner aus 1 und Nullen besteht, der nur durch eine gerade Zahl, oder durch 5 ohne Rest getheilt werden kann. Z. B. $0,63 = \frac{63}{100}$. $0,65 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$ $0,62 = \frac{62}{100} = \frac{31}{50}$. $0,64 = \frac{64}{100} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$.

72. **Einen Decimalbruch in einen gemeinen von einem gegebenen Nenner zu verwandeln.** Man verfährt hier so, wie wenn man einen Bruch auflöst, und seinen Werth suchet (§. 62.). Will ich wissen, wie viel Kreuzer $\frac{2}{3}$ eines Guldens machen, so ist es eben so viel, als wenn ich $\frac{2}{3}$ in einen andern verwandeln wollte, dessen Nenner 60 wäre. Da multiplicire ich aber den Zähler 2 durch 60, das Product wird mit dem Nenner 3 dividirt, so erhalte ich den neuen Zähler, unter den ich dann den gegebenen Nenner 60 schreibe, oder $\frac{2 \times 60}{3} = 40$ und der ganze Bruch ist $\frac{40}{60}$ (§. 56. a). So multiplicirt man auch hier den Decimalbruch, als den Zähler mit dem gegebenen Nenner, dividirt das Product durch den Nenner des Decimalbruches, der Quotient ist der Zähler des gebrauchten Productes, unter den man nur den gegebenen Nenner schreiben darf. Allein selten geht die Division so an, daß kein Rest bleibe, und der Zähler besteht gar oft wieder aus Decimalzahlen.

Z. B. 0,48 soll in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 25 seyn muß. $\frac{48 \times 25}{100} = \frac{48}{4} = 12$.

Also

Also ist der neue Bruch $\frac{12}{25}$. Hingegen, wenn 0,27 in einen Bruch verwandelt werden sollte, dessen Nenner 53 seyn muß, so gäbe $\frac{27 \times 53}{100} = \frac{1431}{100} = 14,31$ zum neuen Zähler. Also wieder einen Decimalbruch.

Diese Aufgabe kann oft mit Nutzen angewendet werden. Z. B. Man fragt, wie viel Minuten und Secunde machen 0,35 eines Grades, oder einer Stunde? Das heißt, man möchte $\frac{35}{100}$ in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner 60 wäre; denn so viele Minuten hält ein Grad, oder eine Stunde. $\frac{35 \times 60}{100} = \frac{2100}{100} = 21$, oder $\frac{21}{60}$. Also 21 Minuten.

Wie viele Minuten und Secunden beträgt der Decimalbruch 0,21? $\frac{21 \times 60}{100} = \frac{1260}{100} = 12 \frac{6}{10}$ oder 12 Minuten, und $\frac{6}{10}$ Minuten. Um auch diesen Bruch zu Secunden zu machen verfahre man eben so $\frac{6 \times 60}{10} = 36$. Also ist 0,21 = 12 Minuten, 36 Secunden.

Sechster Abschnitt.

Von den arithmetischen Operationen bey Decimalbrüchen.

Decimalbrüche zu addiren.

74. Schreib die einzelnen Brüche so untereinander, daß ihre Decimalzeichen alle in einer Columne übereinander zu stehen kommen. Diese Art anzuschreiben

ben beobachtet man auch bey der Subtraction. Hernach verrichte die Addition gerade so, wie bey ganzen Zahlen, und setze das Decimalzeichen in die nemliche Columne, in der es bey den einzelnen Brüchen steht. Ein einziges Exempel wird erklecken.

26,358
0,003
7,920
0,0006
———
34,2816.

Decimalbrüche voneinander zu subtrahiren.

75. Wenn der zu subtrahirende Bruch unter den andern gehörig geschrieben worden, subtrahirt, wie sonst bey ganzen Zahlen, und entlehnt auch so, wenn es nöthig ist, eine Einheit von der vorhergehenden Ziffer. Sollte die untere Zahl mehr Decimalstellen haben, als die obere, so darf man dieser nur so viele Nullen am Ende anhängen, als nöthig sind, die untern Ziffern subtrahiren zu können; denn dadurch wird der Werth des obern Bruches nicht verändert (§. 70.). Die Rechtmäßigkeit dieses Verfahrens bey der Addition, und Subtraction bedarf keines besondern Beweises, denn Decimalbrüche folgen dem nemlichen dekadischen Zahlen Systeme, wie ganze Zahlen. Müssen also auch so addirt, und subtrahirt werden. Wie, und warum man aber ganze Zahlen auf die ersagte Art addiren, und so subtrahiren müsse, ist schon erwiesen worden. Ein paar Beyspiele.

```
 3,425      5,47              Schreib   5,47000
 0,987      3,65984                     3,65984
------                                  -------
 2,438                                  1,81016
```

Decimalbrüche miteinander zu multipliciren.

76. Man multiplicirt, wie bey ganzen Zahlen, und addirt die Partialproducte in eine Summe zusammen. Alsdann schneidet man durch das Decimalzeichen von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen ab, als in beyden Factoren Decimalziffern vorkommen. Hätte aber die ganze Summe nicht so viele Ziffern, so setzt man ihnen so viele Nullen vor, als noch Ziffer fehlen.

```
  43,7
    13
  ----
  1311
 437
 -----
 568,1.
```

Hier wird nur eine Ziffer abgeschnitten, weil in beyden Factoren nur eine Decimalziffer ist.

```
    33,23          2,4542
    12,134         0,0053
   -------        -------
    13292          73626
    9969         122710
   3323        ----------
  6646         0,01300726.
 4323
---------
 403,21282
```

Hier kommen in der Summe nur 7 Ziffern, und acht Decimalstellen muß man haben. Also setzt man noch eine Nulle nach dem Decimalzeichen.

$$\begin{array}{r} 4{,}12 \\ 3{,}7 \\ \hline 2884 \\ 1236 \\ \hline 15.244 \end{array}$$

Beweis. Man wird die Richtigkeit dieser Multiplication leicht begreifen, wenn man die Decimalbrüche nur mit ihrem Nenner, wie gemeine Brüche schreibt, und sie dann miteinander multiplicirt. Man nehme das erste Exempel. $43,7 = \frac{437}{10}$. Dieß multiplicirt mit 13 giebt $\frac{5681}{10} = 568\frac{1}{10} = 568,1$, wie wir oben gefunden haben.

Wir wollen auch das dritte Exempel auf diese Art berechnen. $2,4542 = \frac{24542}{10000}$, und $0,0053 = \frac{53}{10000}$. Also $\frac{24542 \times 53}{10000 \times 10000} = \frac{1300726}{100000000} = 0,01300726$, wenn man neimlich diesen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt. Man sieht hier, warum vor der ersten Decimalstelle eine Nulle gesetzt werden muß, weil ich den kleinern Zähler durch den größern Nenner nicht dividiren kann, bis ich jenem zwo Nullen angehängt habe. Die erste Nulle zeigt an, daß der Divisor noch nicht im Dividend enthalten, und erst nach Anhängung der zweyten Nulle wird der Dividend größer, als der Divisor, und der Quotient 1. Der Nenner des Decimalbruches muß hier 1 mit 8 Nullen seyn. Dieß wäre aber

aber nicht möglich, wenn der Zähler, oder Decimalbruch nicht aus 8 Ziffern bestünde (§. 69. a). Also muß zu den sieben Ziffern desselben noch eine Nulle, und zwar gleich nach dem Decimalzeichen hinzukommen; weil die Ziffern des Zählers sonst ihren Werth nicht behielten.

Decimalbrüche durcheinander zu dividiren.

77. Man dividirt wieder, wie bey ganzen Zahlen, und schneidet hernach im Quotienten von hinten herein so viele Ziffern als Decimalstellen ab, um so viele Decimalziffern der Dividend mehr hat, als der Divisor. Hat aber der Divisor selbst mehr, als jener, so setzt man zum Dividend nach Belieben Nullen hinzu, bis sie die Zahl der Decimalziffern des Divisors übersteigen, und so der Quotient auch Decimalstellen bekömmt. Darum wenn auch nach geendigter Division noch ein Rest bleibt, soll man auch diesem eines, oder mehrere Nullen anhängen, und fortdividiren, je genauer der Quotient werden soll.

8,445 { 2,6	9,83542 { 30,17
3,22	0,326
644	978
2005	554
322	326
1932	2282
73	326
	2282
	0

49,1
20,074. Schreib dafür 49,10000 { 2,44 2c.
20,074
40148
89520
20074
80296
92240
20074
80296
1944

Wollte man im ersten, und dritten Exempel den Quotus noch genauer haben, so müßte man nur dem Dividend noch mehrere Nullen beyfügen, und fort dividiren. Das Decimalzeichen würde dadurch verrückt, weil jede Nulle im Quotient eine neue Ziffer giebt, und in diesem so viele Ziffern müssen abgeschnitten werden, als der Dividend mehr Decimalstellen hat, als der Divisor.

Beweis. Man schreibe wieder den Dividend, und Divisor, wie gemeine Brüche, und dividire jenen durch diesen, wie oben §. 67 gelehret worden. Man wird den nemlichen Quotienten erhalten, der hier heraus kömmt, wenn man nach den Regeln der Decimaldivision verfährt. Also muß die Verfahrungsart richtig seyn. Man wähle das letzte Exempel. Der Dividend $49,1 = 49\frac{1}{10} = \frac{491}{10}$. Der Divisor $20,074 = 20\frac{74}{1000} = \frac{20074}{1000}$. Also ist $\frac{49,1}{20,074} = \frac{491}{10} : \frac{20074}{1000}$,

oder $\frac{491}{10} \times \frac{1000}{20074} = \frac{491000}{200740} = \frac{49100}{20074} = \frac{24550}{10037}$

$= 2\frac{4476}{10037}$. Verwandelt man diesen Bruch in einen Decimalbruch, so ist der ganze Quotient, wie oben, 2,44 ꝛc.

Ein strengerer Beweis bey der Multiplication und Division, wäre für junge Leute, für die ich schreibe, zu schwer, wie mich deucht. Man findt ihn in andern Elementen, z. B. Pickel Elem. Arith. §§. 142. 143. 141. 152.

Drittes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit Buchstaben.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

78. Die nemlichen gemeinen Ziffern können unterschiedliche Dinge anzeigen. Z. B. 3 kann drey Gulden, Kreuzer, Heller, Ellen, Menschen u. s. w. anzeigen. Ziffern sind also allgemeine Zeichen, die verschiedne Dinge bezeichnen können, und was von den Ziffern wahr ist, auch von Dingen, als Größen betrachtet, wahr, die dadurch bezeichnet werden. Z. B. Wenn 2 und 3 fünf ausmachet, so machen 2 und 3 Gulden, Kreuzer, Heller, Ellen und Menschen fünf Stücke ihrer Art aus.

a) Wie

a) Wie man die Ziffern als allgemeine Zeichen gebraucht, um zählbare Dinge dadurch auszudrücken, so kann man noch allgemeinere Zeichen finden, um auch verschiedne Ziffern, und Größen dadurch anzuzeigen. Solche Zeichen sind die Buchstaben. So kann a 1, 2, 3, 4, oder was man für eine Ziffer will, bedeuten, und b jede andere Ziffer, die nicht durch a ausgedrückt ist.

Man weis gar oft den Werth der Größe nicht bestimmt anzugeben, oder wenn man es auch weis, will man ihn nicht angeben, weil man die Aufgabe nicht bloß für einen, sondern für alle ähnliche Fälle möchte aufgelöset haben. Z. B. 3 Personen sollen eine gewisse Summe Geldes so theilen, daß die zweyte noch so viel bekomme, als die erste, und die dritte dreymal soviel, als die zweyte. Ich weis hier die Summe, und den Antheil der ersten Person in Ziffern nicht, und kann also mit Ziffern nicht rechnen. Darum brauche ich ein allgemeineres Zeichen für die Summe, und den Antheil der ersten Person, und heiße die Summe a, sie mag groß oder klein, mit was immer für Ziffern ausgedrückt seyn. Und weil der Antheil der ersten Person von der Summe verschieden seyn muß nach der Aufgabe, bezeichne ich diesen wieder mit einem andern Buchstaben, z. B. mit x. Durch die Algebra, wie wir weiter unten sehen werden, kann ich, wenn ich die Buchstaben gebrauche, die Aufgabe doch auflösen, und am Ende finde ich, daß der Antheil der ersten Person der neunte Theil, der zweyte $\frac{2}{9}$, der dritte $\frac{6}{9}$ der Summe sey; man mag den Werth von a, oder von der Summe bestimmen, wie man will.

79. Eine Größe kann auf zweyerley Art betrachtet werden, **positiv** oder **negativ**, **bejahend** oder

verneinend. Heißt man sie in einer gewissen Rücksicht positiv, so heißt sie in der entgegengesetzten Rücksicht negativ. Eine positive Größe zeigt das Zeichen +, eine negative das Zeichen — an. + 3 a, + 4, + 10 a b ꝛc. sind positive, — 3 a, — 4, — 10 a b negative Größen.

a) Wenn eine positive Größe allein, oder im Anfange einer Summe steht, läßt man das Zeichen + gar weg. Und alle Größen ohne Zeichen nimmt man für positive.

Drückt + 3 baares Geld aus, so bedeutet — 3 Schulden. Bedeutet + 3 Schulden, so heißt — 3 baares Geld. Bedeutet + 4 vier Meilen von Donauwerd nacher Augsburg, so bedeutet — 4 vier Meilen von Augsburg nacher Donauwerd, oder rückwärts. Heißt + 3 drey Schuh über sich, so heißt — 3 drey Schuh unter sich. Bezieht + 4 auf Geben, so bedeutet — 3 Nehmen. Also ist — immer das entgegengesetzte von +. Es hängt aber von mir, oder der Natur einer Aufgabe ab, in welchem Verstande ich eine Größe als positiv soll gelten lassen. Daraus wird bestimmt, in welchem Verstande sie negativ könne genannt werden.

b) Also kann die nemliche Größe jetzt als positiv, ein andersmal als negativ angesehen werden.

c) Die negative Größe ist eben sowohl etwas wirkliches, als die positive. Drey Gulden Schulden sind etwas wirkliches, wie drey Gulden baares Geld.

Es ist also nur in einem gewissen Verstande wahr, was man gemeiniglich sagt: **Eine negative Größe ist weniger, als nichts.** Versteht man dieß so, daß eine negative Größe **gar nichts wirkliches** sey, so ist es falsch;

falsch; denn weniger, als Nichts kann es nicht geben. Setzt man aber eine Gränze, daß dießseits derselben das Positive, jenseits das Negative steht, und in der Gränze das Nichts, oder daß da das Positive ganz verschwinde, so ist es wahr, daß eine negative Größe weniger, als Nichts sey; denn das Negative hat wieder seine Grade, durch die es anwächst, wie das Positive abgenommen, und wird nur in Ansehung des Positiven negativ genannt. Man nehme von der Größe 4 immer 2 hinweg, so entsteht daraus 4, 2, 0, —2 —4 u. s. w. Aber auch —2—4 sind etwas wirkliches, und nicht Nichts, und drücken einen noch größern Mangel aus, als 0.

Wenn Petrus 3 Gulden, Paulus nichts, Andreas 3 Gulden Schulden hat, so ist es wahr, daß Andreas noch ärmer, als Paulus ist; denn er brauchte 3 Gulden, seine Schulden zu bezahlen. Alsdann hätte er erst nichts, wie Paulus. Und so hätte er freylich weniger, als der, der nichts hat. Aber 3 Gulden Schulden sind doch etwas wirkliches, nichts eingebildetes, und nur **in Ansehung des baaren Geldes** weniger, als nichts, an sich aber etwas wirkliches. Nehme ich 3 Gulden Schulden, als eine positive Größe, so leuchtet dieses noch mehr ein. Dann hat Paulus gerade gar nichts, Petrus aber das Gegentheil einer Schuld, baares Geld, welches in Ansehung einer positiven Schuld etwas negatives ist, das heißt, noch mehr, als ein simpler Mangel, oder Abgang einer Schuld.

80. Es werden bey der Rechnung mit Buchstaben auch noch Ziffern gebraucht, und zwar auf dreyerley Art. Entweder stehen sie allein, oder unmittelbar vor, oder nach den Buchstaben. Z. B. $a+4$, $a-4$, od r $2a$, oder a^2; im ersten Falle gelten die Ziffern,

wie sonst, und erhalten keinen besondern Namen, nur daß sie nach Beschaffenheit des ihnen vorstehenden Zeichens positiv, oder negativ sind. Steht aber eine Ziffer oder Zahl unmittelbar vor einem Buchstaben, ohne daß ein Zeichen dazwischen ist, so heißt man diese Ziffer den **Coefficient** dieses Buchstabens; und es bedeutet, daß der Buchstaben mit dieser Ziffer multiplicirt, oder daß dieser Buchstaben so oft zu sich selbst **addirt** ist, als diese Ziffer Einheiten enthält (§. 17.). So bedeutet z. B. 6 a soviel als $6 \times a$, oder $a + a + a + a + a + a$. Wäre $a = 2$, so ist $6a = 6 \times 2 = 12$. Vielleicht hat man hier ohne Noth eine neue Benennung eingeführt, und man hätte besser gethan, wenn man diese vor den Buchstaben stehende Zahlen **Factoren**, oder **Multiplicatoren** schlechthin genannt hätte. So hätten Anfänger nichts neues zu lernen gehabt. Stehen die Ziffern unmittelbar hinter den Buchstaben (oder auch hinter den Zahlen) aber ein wenig weiter oben, so nennt man sie **Exponenten**, und sie bedeuten, daß die durch den Buchstaben (oder durch die Zahl) angedeutete Größe so oft mit sich selbst **multiplicirt** sey, weniger einmal, als der Exponent Einheiten enthält. So bedeutet a^2, a sey einmal; a^3, a sey zweymal mit sich selbst multiplicirt.

a) Also ist 3 a ganz etwas anders, als a^3. 3 a heißt soviel als $a + a + a$. a^3 heißt $a \times a \times a$. Wäre $a = 4$, so ist $3a = 12$, und $a^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

b) Jede

b) Jede Größe, vor welcher keine andere Ziffer steht, ist nur einmal zu sich selbst addirt, oder mit 1 multiplicirt; denn $2 \times 1 = 2$, $3 \times 1 = 3$, $a \times 1 = a$. Wo also kein Coefficient steht, ist der Coefficient 1, oder $a = 1a$.

c) Jede Größe, hinter welcher kein Exponent steht, ist niemal mit sich selbst multiplicirt, also ist $2^1 = 2$. $3^1 = 3$. und $a^1 = a$. Wo also kein Exponent ist, versteht man 1, oder $a = a^1$. Der Exponent muß um 1 größer seyn, als die Zahl der Multiplicationen, die hier 0 ist.

d) $a^1 = a$, und $a = 1 \times a$. Also muß $a^0 = 1$ seyn. a^0 bedeutet, a sey gar nicht einmal mit sich selbst multiplicirt, sondern gar nicht da, und es bleibt nur der Coefficient 1 von a^0. Unten wird dieses anders erwiesen werden.

Anstatt der Coefficienten, und Exponenten werden oft Buchstaben gebraucht. Z. B. anstatt $2a$, $3a$, ma, na, anstatt a^2, a^3, a^m, a^n. So auch $ma + na$, oder a^{m+n}, a^x, a^y, a^z rc. Ja der Coefficient, oder Exponent können sogar Brüche seyn. Z. B. $\frac{1}{2}a$, oder $\frac{m}{n}a$, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{m}{n}}$. Wovon auch hernach mehr.

81. Eine algebraische Größe ist entweder einfach, oder zusammengesezt, incomplexa, vel complexa. Eine einfache heißt diejenige, die mit keiner andern durch das Zeichen + oder — verbunden ist, wie z. B. a, $3abc$, $-5dc$ rc. Eine zusammengesezte besteht aus mehr solchen einfachen Größen, die durch + oder — verbunden sind. Die einfachen Größen nennet man terminos, oder auch Glieder. Eine zusammen-

gesetzte Größe ist z. B. $a + b$, $3c - 2x + d$ rc. Ueberhaupt nennet man so eine zusammengesetzte Größe vielgliedrig, polynomium, und zwar nach der Anzahl der Glieder, zwey — drey — viergliedrig, binomium, trinomium, quadrinomium.

82. Glieder sind, die aus gleichen Buchstaben, und Exponenten bestehen. Z. B. a, $2a$. $-3a$; ungleichartige sind, die entweder aus verschiedenen Buchstaben bestehen; oder wenn die Buchstaben gleich sind, doch verschiedne Exponenten haben. a und b, ab und a, a und a^2 sind ungleichartige Größen. Die Verschiedenheit der Coefficienten, oder der Zeichen $+$ oder $-$ machet Größen nicht ungleichartig. $-a$ und $+a$, $2a$ und $3a$ sind gleichartige Größen.

Zweyter Abschnitt.

83. Erste Regel Sind zwo oder mehrere Größen gleichartig (§. 82.) und haben gleiche Zeichen, so addire ihre Coefficienten zusammen, setze die Buchstaben einmal hinter die Summe der Coefficienten, und das Zeichen, das sie haben, vor den Coefficienten. Z. B.

I. $5ab + 3ab = 8ab$
II. $-5ab - 3ab = -8ab$
III. $6a^2d + 2a^2d = 8a^2d$
IIII. $a + 3a = 4a$, weil a soviel ist, als 1 a (80. b).

Beweis.

Beweis. Addiren heißt eine Summe finden, die so groß ist, als alle ihre Theile zusammen, oder die allen Theilen gleich ist (§. 18.). Dieß geschieht hier. Es wird z. B. im ersten Exempel verlangt, man solle angeben, wie oft + ab in den zwey Gliedern ab, und 3ab, da sey. Im ersten ist es fünfmal, im zweyten dreymal. Also zusammen achtmal. Man darf also nur die Coefficienten addiren, die Buchstaben einmal dazuschreiben, und das Zeichen voraus setzen. Im zweyten Exempel verlangt man zu wissen, wie oft — ab da sey. Es ist achtmal da. Folglich ist die Summe — 8ab.

Zweyte Regel. Sind die Größen gleichartig, haben aber entgegengesetzte Zeichen, so zieht man den kleinern Coefficienten von dem größern ab, setzt den Rest mit den Buchstaben, als die Summe an, und das Zeichen des größern Gliedes voraus. Sind die Coefficienten gleich, so läßt man die Glieder in der Summe gar weg. Z. B.

I.
$$\begin{array}{r} 29a - 5b \\ -\ 6a + 2b \\ \hline 23a - 3b \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r} -7bc + 3a \\ 8bc - 3a \\ \hline bc \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{r} 36 - 8ad \\ -12 + 12ad \\ \hline 24 + 4ad \end{array}$$

IIII.
$$\begin{array}{r} -18c + 12ac \\ c - 9ac \\ \hline -17c + 3ac \end{array}$$

Beweis. Zwo gleiche Größen, wovon eine positiv, die andere negativ ist, heben einander auf, so bald man sie in eine Summe bringt; denn wenn man

so viel nimmt, als man giebt, so bleibt nichts. Es bedeutet aber + geben, — nehmen (§. 79. a). Eben so, wenn das Positive mehr, als das Negative ist, kann in der Summe nur der Ueberschuß des ersten über das letzte bleiben. Ist das Negative mehr, so bleibt der Ueberschuß von diesem. Man setzt, zwo Personen machen ein eingeworfenes Gut, oder wollen ihrem Vermögen nach nur für eine Person angesehen werden. Hat A 3 Gulden baares Geld, und B 3 Gulden Schulden, so haben sie miteinander nichts, was ihnen gehört; denn die 3 Gulden des A sind nothwendig die Schuld des B zu bezahlen, oder $3 - 3 = 0$. Hat A 12 Gulden, und B ist 9 schuldig, so ist ihr gesammtes Vermögen, das ihnen bleibt $12 - 9 = 3$. Hat A endlich 12 Gulden Schulden, oder -12, und B 9 baares Geld, so ist ihr ganzes Vermögen $-12 + 9 = -3$, oder zusammen haben sie 3 Gulden Schulden.

Dritte Regel. Sind die Größen ungleichartig, so werden sie bloß mit ihren Zeichen in der Summe angesetzt. Z. B.

I.	II.	III.
a	a	$-3bc$
$3a^2$	ab	$+5b$
$a + 3a^2$	$a + ab$	$-3bc + 5b$

Beweis. Ungleichartige Größen dürfen niemal zusammen addirt werden (§. 18.), nemlich so, daß sie zusammen die Summe von einerley Einheiten ausmachten, weil ihre Einheiten verschieden sind. Z. B. $a + 3a^2$ machten weder $4a$, noch $4a^2$ aus. Die

Einheit

Einheit a ist etwas anders, als die Einheit a^2 (§. 80. a). Man zeigt also hier die addition nur an.

Beyspiele von allen Regeln.

$$\text{I.}\ \begin{array}{r} ab \\ bc \\ \hline ab+bc \end{array} \qquad \text{II.}\ \begin{array}{r} ac \\ ac^2 \\ \hline ac+ac^2 \end{array} \qquad \text{III.}\ \begin{array}{r} ab+c \\ b-c \\ \hline ab+b \end{array}$$

$$\text{IIII.}\ \begin{array}{r} a^6-4b+12c-3 \\ -a^5+2b-15c+8 \\ \hline a^6-a^5-2b-\ 3c+5. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15-\ 6+8=17 \\ 3+10-7=\ 6 \\ \hline 18+\ 4+1=23 \end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Subtraction der algebraischen Größen.

84. *Einzige Regel.* Man schreibe unter den Minuendus den Subtrahendus, verändere in diesem alle Zeichen in die entgegen gesetzte, nemlich + in — und — in +, und alsdann addire man den Minuendus, und Subtrahendus nach den Regeln der Addition, so ist die Subtraction geschehen.

Beyspiele.

$$\text{I.}\ \begin{array}{rr} & 4a-3c \\ \text{Schreib} & 2a-4c \\ - & 2a+4c \\ \hline & 2a+c \end{array} \qquad \text{II.}\ \begin{array}{r} 5ac-4b^2+3d \\ -3ac-4b^2+7d \\ +3ac+4b^2-7d \\ \hline 8ac-4d \end{array}$$

$$\text{III.}\ \begin{array}{r} 7-5+2=\ \ 4 \\ 4-2-3=-1 \\ -\ 4+2+3=+1 \\ \hline 3-3+5=\ \ 5. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15-8=\ \ 7 \\ 7-5=\ \ 2 \\ -\ 7+5=-2 \\ \hline 8-3=\ \ 5 \end{array}$$

Beweis.

Beweis. Soll eine positive Größe von einer positiven abgezogen werden, so muß diese nun vermindert werden. Dieß geschieht aber, wenn ich der zu subtrahirenden Größe ein negatives Zeichen gebe, und sie zum Miniendus so addire; denn alsdenn wird wirklich der Coefficient des Subtrahendus vom Coefficienten des Minuendus abgezogen (§. 83. zw. Regel).

Soll eine negative Größe von einer positiven Größe abgezogen werden, so heißt das, man soll so viel negatives aufheben, wegnehmen, als die zu subtrahirende Größe anzeigt; dieß geschieht aber, wenn man eben so viel Positives hinzu thut, d. i. das Zeichen — in + verwandelt. Ich kann z. B. eine Schuld von 3 Gulden nicht anders aufheben, als wenn ich 3 Gulden zur Bezahlung derselben hergebe.

Oder kürzer. Das positive Nehmen ist wirkliches Nehmen einer positiven Größe. Also muß das negative Nehmen so viel, als Geben seyn. Zwo Negationen sind eine Affirmation. Also, wenn man von 4, 2 abziehen soll, so muß man schreiben $4 - 2 = 2$. Soll man von 4, -2 abziehen, so muß man schreiben $4 + 2 = 6$, oder allzeit die Zeichen des Subtrahendus in die entgegengesetzten ändern.

Das letzte Exempel wird die Rechtmäßigkeit des Verfahrens augenscheinlich zeigen. Ich soll von $15 - 8$, das ist von 7 abziehen $7 - 5$, d. i., 2. Wenn ich also von 15 abziehe 7, so habe ich um 5 zu viel abgezogen.

gen. Ich muß also diesen Schaden wieder ersetzen, d. i. ich muß aus — 5 machen + 5 und dieses addiren.

Vierter Abschnitt.

Multiplication algebraischer Größen.

85. **Erste Regel.** Buchstaben, die miteinander multiplicirt werden sollen, setzt man nebeneinander, ohne ein Zeichen dazwischen zu machen. Es liegt auch nichts daran, in welcher Ordnung sie aufeinander folgen, welcher der erste, mittere, oder letzte werde (§. 27. b). Z. B. $a \times b = ab$, oder ba. $a \times b \times c = abc$, oder bac, oder acb, oder bca ꝛc. Doch hat es seine Bequemlichkeit, wenn man die Buchstaben nach der Ordnung des Alphabets schreibt.

Zweyte Regel. Alle Glieder des Multiplicandus müssen durch alle Glieder des Multiplicators multiplicirt werden, weil nemlich jener ganz durch den ganzen Multiplicator multiplicirt werden soll. Die partialen Producte werden alsdann nach den Regeln der Addition in eine Summe gebracht. Z. B.

I. $a + b$ multiplicirt mit
c
$\overline{ac + cb}$

II. $a + b + c$ multiplicirt mit
$d + e$
$ad + bd + cd$
$ae + be + ce$
$\overline{ad + bd + cd + ae + be + ce.}$

Dritte

Dritte Regel. Die Coefficienten des Multiplicators werden mit den Coefficienten des Multiplicandus multiplicirt; denn multipliciren heißt einen Coeffcienten so oft nehmen, als der andere Einheiten enthält (§. 27. a). $2a \times 3$ ist so viel, als $2a + 2a + 2a = 6a$. $2a \times 4b = 8ab$. Es sey $a = 3$, so ist $2a = 6$. Es sey $b = 5$, so ist $4b = 20$, folglich $2a \times 4b = 6 \times 20 = 120$, oder $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Ein Beyspiel:

$$\begin{array}{l} 5a + 3b \\ 2d + 4c \\ \hline 10ad + 6bd \\ 20ac + 12bc \\ \hline 10ad + 20ac + 6bd + 12bc \end{array}$$

Vierte Regel. Die Exponenten gleicher Buchstaben werden zusammen addirt. Dieß folgt aus der Bedeutung der Exponenten (§. 80.). Z. B. $a^2 = a \times a = aa$. $a^3 = a \times a \times a = aaa$. Soll ich a^2 mit a^3 multipliciren, so ist das soviel, $aa \times aaa$. Das giebt nach der ersten Multiplicationsregel $aaaaa$, oder $a^{2+3} = a^5$. Die Mathematiker schreiben nemlich Bequemlichkeit halber, damit sie den nemlichen Buchstaben nicht so oft setzen dürfen, statt $aaaaa$ gleich a^5, und der Exponent zeigt an, wie oft der nemliche Buchstaben nacheinander gesetzt werden müßte. Wo kein Exponent steht, versteht man 1 (§. 80. c.).

$$
\begin{array}{llll}
a^2 & +b & +c^3 & \\
a & +b^2 & +c^2 & \\
\hline
a^3 & +ab & +ac^3 & \\
a^2b^2 & +b^3 & +b^2c^3 & \\
a^2c^2 & +bc^2 & +c^5 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$a^3+ab+ac^3+a^2b^2+b^3+b^2c^3+a^2c^2+bc^2+c^5$$

Fünfte Regel. Gleiche Zeichen der Factoren geben im Producte $+$, ungleiche $-$. Oder

$$
\begin{array}{l}
+\times+ \text{ giebt } + \\
-\times- \text{ giebt } + \\
+\times- \text{ giebt } - \\
-\times+ \text{ giebt } -
\end{array}
$$

Beweis. $+a\times+b$ heißt, ich soll die positive Größe a so oft positiv nehmen, als die andere, b Einheiten enthält. Also muß ja das Product positiv seyn, nemlich $+ab$.

$+a\times-b$ heißt, ich solle die positive Größe a so oft negativ nehmen, als b Einheiten enthält. Also muß das Product negativ seyn, nemlich $-ab$; denn wenn ich eben diese Größe a positiv nehme, so kömmt $+ab$ heraus, wie wir eben bewiesen haben. Wenn ich sie also negativ nehme, muß $-ab$ heraus kommen.

$-a\times+b$ heißt, ich soll die negative Größe $-a$ so oft nehmen, als b Einheiten enthält. Also muß das Product wieder negativ seyn; denn eine Schuld $-a$ zwey, drey, viermal genommen, bleibt allzeit eine Schuld.

$-a\times-b$ heißt, ich soll die negative Größe a so oft negativ nehmen, so viele Einheiten b enthält.

hält. Eine Negative Größe negativ nehmen, heißt aber, sie im entgegengesetzten Verstande, d. i. positiv nehmen. Also ist das Product positiv.

Vieleicht läßt sich dieß den Anfängern auch so begreiflich machen.

I. Ich sage ja, daß dieses ist. Zwo Affirmationen geben eine Affirmation, $+ \times +$ giebt $+$

II. Ich sage nicht, daß dieses ist. Ist eine Negation. $- \times +$ giebt $-$

III. Ich sage, daß dieses nicht ist. Ist eine Negation. $+ \times -$ giebt $-$

IIII. Ich sage nicht, daß dieses nicht ist. Zwo Negationen sind eine adfirmation. $- \times -$ giebt $+$

Beyspiele von allen Regeln.

I.
$$\begin{array}{l} \quad 2a^2 - 3b \\ \underline{-5a + 4b^2} \\ -10a^3 + 15ab + 8a^2b^2 - 12b^3 \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{l} \quad 5x + 3c \\ \underline{-\ 2x + 4c} \\ -10x - 6cx \\ \underline{\qquad\quad + 20cx + 12c^2} \\ -10x + 14cx + 12c^2 \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{\qquad + ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

IIII.
$$\begin{array}{l} a - b \\ \underline{a - b} \\ a^2 - ab \\ \underline{\qquad - ab + b^2} \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{rl} \text{V.} & a+b \\ & a-b \\ \hline & a^2+ab \\ & \quad -ab-b^2 \\ \hline & a^2-b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{VI.} \quad 2a^6-5b^2+4c^2 \\ \quad -5a^2+4b^2c-3c \\ \hline -10a^8+25a^2b^2-20a^2c^2+8a^6b^2c-20b^4c \\ \quad +16b^2c^3-6a^6c+15b^2c-12c^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{VII.} & 3c-6+a \\ & 5+b+8 \\ \hline & 15c-30+5a \\ & 3bc-6b+ab \\ & 24c-48+8a \\ \hline & 39c+3bc-78-6b+13a+ab. \end{array}$$

Fünfter Abschnitt.

Division algebraischer Größen.

26. Die Division ist der Multiplication entgegengesetzt, und löset das wieder auf, was durch die Multiplication zusammen gesetzt worden (§. 36.). Jede Größe kann als ein Product aus zwoen andern betrachtet werden; denn sie ist wenigstens mit 1 multiplicirt. Weil nun bey der Division eines Prodructes durch einen Factor der andere heraus kömmt (ebend.); lassen sich hieraus alle Divisionsregeln leicht bestimmen.

Erste Regel von Buchstaben. Kömmt im Nenner und Zähler eines einfachen Dividendus der nemliche Buchstaben vor, so läßt man ihn in beyden weg. Z. B. a b soll dividirt werden mit b, oder

$$\frac{ab}{b} = a. \quad \frac{acd}{c} = ad$$

a) Eben so ist es bey zusammengesetzten Größen. Da muß in allen Gliedern des Dividends der Divisor weggelassen werden.

$$\frac{ab + ac + ad}{a} = b + c + d. \quad \frac{ab + c^2 b + bx}{b} = a + c^2 + x$$

b) Kömmt der Buchstabe, durch den dividirt werden soll, nicht in allen Gliedern des Dividends vor, so wird er nur bey jenen weggelassen, in denen er ist; bey den übrigen Gliedern aber die Division nur angezeigt.

$$\frac{ab + bd + cd}{b} = a + d + \frac{cd}{b}. \quad \frac{ax^2 + 5b + 3c + x^2 d}{x^2} = a + d + \frac{5b + 3c}{x^2}$$

Beweis. Wenn ein Buchstabe durch einen andern multiplicirt werden muß, setzt man sie nur nebeneinander hin (85. I. Regel). Weil also die Division der Multiplication entgegen gesetzt ist, muß man den Divisor, als den einen Factor wieder wegnehmen vom Dividend, oder Product, d. i. auslassen, um den andern Factor, oder Quotienten zu bekommen.

Zweyte

Zweyte Regel von Coefficienten. Der Coefficient des Dividends wird durch den Coefficient des Divisors dividirt. Der Beweis ist der nemliche

$$\frac{6a}{2b} = \frac{3a}{b} \cdot \frac{15c}{3} = 5c \cdot \frac{12a}{3a} = 4$$

a) Geht die Division des Coefficienten nicht ohne einen Rest zu lassen genau an, so zeigt man sie nur an.

$$\frac{13a}{5b} = \frac{13a}{5b} \cdot \frac{12a}{7a} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

b) So müssen auch die Coefficienten aller Glieder eines zusammengesetzten Dividends durch den Coefficienten des Divisors dividirt werden, und wo es nicht angeht, die Division nur angezeigt werden.

$$\frac{12a + 6ab + 3ad}{3a} = 4 + 2b + d. \frac{9b + 6c + 8d}{3b} = 3 + \frac{2c}{b} + \frac{8d}{3b}.$$

c) Oft ist der Coefficient des Divisors in jenem des Dividends nur einmal enthalten. Und da muß man im Quotus 1 setzen, wenn in demselben Gliede sonst kein Buchstabe bleibt. Man merke nur, daß man den Coefficient 1 versteht, wo sonst keiner ist. Z. B.

$$\frac{a}{a} = \frac{1a}{1a} = \frac{1}{1} = 1. \text{ So auch } \frac{2a}{2a} = \frac{2}{2} = 1. \frac{a + ab}{a} = 1 + b. \frac{b^2d}{b^2d} = 1. \frac{5x + 20xb}{5x} 1 + 4b.$$

Dritte Regel von den Exponenten. Der Exponent des Divisors wird vom Exponenten des Dividends abgezogen.

Beweis. Bey der Multiplication wurde der Exponent eines Factors zum Exponenten des andern addirt. Also weil die Division das Entgegengesetzte von der Multiplication ist, muß ich vom Exponenten des Products den Exponenten des einen Factors abziehen, um den andern zu bekommen. Dieß gilt aber, wie §. 85. III. Regel, nur von den Exponenten gleicher Buchstaben. Eben dieß läßt sich auch aus der ersten Divisionsregel beweisen. Z. B. $a^4 = aaaa$, $a^2 = aa$. Also ist $\frac{a^4}{a^2} = \frac{aaaa}{aa} = aa = a^{4-2}a = a^2$. Denn $\frac{aaaa}{aa} = \frac{aa \times aa}{aa} = aa$, weil die nemlichen Buchstaben wegbleiben müssen.

$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^1 = a.$ $\frac{b^6 c^3}{b^2 c} = b^{6-2} c^{3-1} b^4 c^2$

$$\frac{ab^5 + b^4 d + b^2 m}{b^2} = ab^3 + b^2 d + m$$

a) $\frac{a}{a} = 1.$ $\frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0.$ Also ist $a^0 = 1$, und weil a eine jede Größe vorstellet, folgt daraus, daß jede Größe, deren Exponent eine Nulle ist, so viel sey, als 1 (§. 80. d). So ist also auch $\frac{a^2}{a^2} = a^0 = 1.$ $ab^0 = a \times 1 = a.$ $b^0 c^0 = 1.$

b) $\frac{a^2}{a^4} = \frac{1aa}{aaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}.$ Es ist aber $\frac{a^2}{a^4}$ auch $a^{2-4} = a^{-2}$. Also $a^{\frac{1}{2}} = a^{-2}$, oder eine Potenz mit einem negativen Exponenten ist gleich 1, dividirt mit der

nemli-

nemlichen Potenz, aber mit positiven Exponenten. Also ist auch $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. $ba^{-2} = b \times \frac{1}{a^2} = \frac{b}{a^2}$. $\frac{a}{b^2 c^3} = a \times \frac{1}{b^2 c^3} = a \times b^{-2} c^{-3} = ab^{-2} c^{-3}$. $\frac{1}{a^m b^{2n}} = a^{-m} b^{-2n}$

e) $\frac{c}{c^{-1}} = c^2$, Denn der Exponent des Divisors muß vom Exponenten des Dividends abgezogen werden. In der abzuziehenden Größe müssen aber die Zeichen in die entgegengesetzte verwandelt werden (§. 84.). Also ist $\frac{c}{c^{-1}} = c \times c^1 = c^2$. (§. 58. IIII. Regel.). Soll auch $\frac{c^2 d^x}{c d^{-1}} = c d^{x+1}$

Vierte Regel von den Zeichen. Gleiche Zeichen im Divisor, und Dividend geben im Quotienten +, ungleiche —.

Beweis. Diese Regeln gelten bey der Multiplication (§. 85. V. Regel). Also müssen sie auch bey der Division gelten; denn die Division muß die Factoren wieder herstellen, aus denen das Prodruct, oder der Dividend entstanden ist.

87. Diese vier Regeln gelten bey allen Divisionen, auch wenn der Divisor aus mehrern Gliedern besteht. In diesem Falle verfährt man, wie bey der Division einer Größe durch einen Divisor, der

aus mehreren Ziffern zusammen gesetzt ist. Nemlich man braucht die oben angegebene Regel: Diuide, multiplica, subtrahe, pone, loca (§. 37. V. a). Nur daß man hier statt einer einzelnen Ziffer des Dividends dessen folgendes Glied herabsetzt. Ehe man aber die Division anfängt, soll man nach der Ordnung der Potenzen eines Buchstabens den Dividendus anschreiben, und den Divisor darunter. Diese Division will ich gleich praktisch in einem Exempel zeigen. Es soll $a^2 - 2ab + b^2$, dividirt werden durch $a - b$. Schreib.

I. $a^2 - 2ab + b^2 \;\big\{\; a - b$
$a - b$
$\times a \quad a^2 - ab$
Subt. $- a^2 + ab$ mit Veränd. der Zeichen.
Rest $- ab + b^2$. Dieß wird herab gesetzt
Divisor $a - b$
$\times b \quad - ab + b^2$
Subt. $+ ab - b^2$
0

II. $- 10a^3 + 15ab + 8a^2b^2 - 12b^3 \;\big\{\; 2a^2 - 3b$
$- 5a + 4b^2$
$- 10a^3 + 8a^2b^2$
$+ 10a^3 - 8a^2b^2$
$15ab - 12b^3$
$- 5a + 4b^2$
$15ab - 12b^3$
$- 15ab + 12b^3$
0

III. —

III. $-10x^2 + 14cx + 12c^2 \left\{ -2x + 4c \right.$

$$
\begin{array}{r}
5x + 3c \\
-10x^2 - 6cx \\
+10x^2 + 6cx \\
\hline
20cx + 12c^2 \\
5x + 3c \\
20cx + 12c^2 \\
-20cx - 12c^2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

88. Ich habe bey den Decimalbrüchen §. 71. gezeigt, wie man die Reste der Divisionen, oder die Zahlenbrüche in Decimalbrüche, und gar oft in solche auflöset, die eine ins unendliche laufende Reihe von Ziffern geben, die sich dem wahren Werthe immer mehr nähert, ohne ihn doch einmal zu erreichen. Eben so verfährt man auch mit den Resten aus einer algebraischen Division, oder mit Brüchen, die durch Buchstaben ausgedrücket sind. Man fährt nemlich mit der Division immer fort. Und der daraus entstehende Quotus ist eine Reihe von Größen, die sich dem wahren Werthe des Bruches bald mehr, bald weniger, geschwinder, oder langsamer nähert. Die Reihen haben einen sehr ausgebreiteten Nutzen in der Rechnung des Unendlichen, in der Geometrie, und angewandten Mathematik, den ich also hier noch nicht zeigen kann. Hier also kann ich nur die Art vortragen, wie man die Division solcher Brüche verrichtet, und sie in Reihen auflöst, und die Anwendung in Zahlen davon zeigen.

Es seyn folgende zween Brüche gegeben, die man in Reihen auflösen soll $\frac{a}{b+c}$, und $\frac{a}{b-c}$. Man ver-

verfahre nach den eben angeführten Regeln der Division.

$$\begin{array}{l} a \\ b + c \end{array} \left\{ \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} \text{ ꝛc.} \right.$$

$$\frac{ab}{b} + \frac{ac}{b}$$

$$- a - \frac{ac}{b}$$

$$- \frac{ac}{b}$$

$$b + c$$

$$- \frac{acb}{b^2} - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$+ \frac{ac}{b} + \frac{ac^2}{b^2}$$

$$+ \frac{ac^2}{b^2}$$

$$b + c$$

$$\frac{ac^2 b}{b^3} + \frac{ac^3}{b^3}$$

$$- \frac{ac^2}{b^2} - \frac{ac^3}{b^3}$$

$$- \frac{ac^3}{b^3}$$

$$b + c$$

$$- \frac{ac^3 b}{b^4} - \frac{ac^4}{b^4}$$

$$\frac{ac^3}{b^3} \times \frac{ac^4}{b^4}$$

$$\frac{ac^4}{b^4} \text{ ꝛc.}$$

a

$$\begin{array}{l} a \\ b - c \end{array} \left\{ \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} \text{ ꝛc.} \right.$$

$$\frac{ab}{b} - \frac{ac}{b}$$

$$-a + \frac{ac}{b}$$

$$+\frac{ac}{b}$$

$$b - c$$

$$\frac{acb}{b^2} - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$-\frac{ac}{b} + \frac{ac^2}{b^2}$$

$$\frac{ac^2}{b^2}$$

$$b - c$$

$$\frac{ac^2b}{b^3} - \frac{ac^3}{b^3}$$

$$-\frac{ac^2}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3}$$

$$\frac{ac^3}{b^3}$$

$$b - c$$

$$\frac{ac^3b}{b^4} - \frac{ac}{b^4}$$

$$-\frac{ac^3}{b^3} + \frac{ac^4}{b^4}$$

$$\frac{ac^4}{b^4} \text{ ꝛc.}$$

Es ist meistentheils, wie bey der Auflösung gemeiner Brüche in Decimalbrüche, genug, wenn man nur einige Glieder des Quotienten suchet. Aus diesen sieht man schon, nach welchem Gesetze die übrigen gefunden werden können, ohne Fortsetzung der Division. Z. B. im Bruche $\frac{a}{b+c}$ wechseln **erstens** die Zeichen + und — mit jedem Gliede; **zweytens**, der Zähler eines jeden Gliedes ist der Zähler des Bruches selbst, nemlich a, der im zweyten Gliede mit dem zweyten Theile des Nenners, c, multiplicirt wird, so, daß in jedem folgenden Gliede die Potenz c um 1 wächst. **Drittens**, der Nenner des ersten Gliedes ist b, und wächst dessen Potenz in jedem folgenden Gliede um 1. Das nemliche Gesetz herrscht in der Reihe des Bruches $\frac{a}{b-c}$, nur daß hier die Zeichen nicht wechseln, sondern bey jedem Gliede positiv bleiben. Wollte man also die beyden Reihen weiter fortsetzen, so wäre

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} - \frac{ac^5}{b^6} + \frac{ac^6}{b^7} - \frac{ac^7}{b^8} \text{ rc.}$$

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} + \frac{ac^5}{b^6} + \frac{ac^6}{b^7} + \frac{ac^7}{b^8} \text{ rc.}$$

89. Wenn man für a, b, c Ziffern setzt, so kömmt es darauf an, ob in dem Bruche $\frac{a}{b+c}$ die Zahl, welche b vorstellt, größer, oder kleiner, oder jener

jener Zahl gleich sey, die für c gesetzt wird. Ist sie grösser, so findt man den Werth des Bruches bald ohne merklichen Fehler, und zwar desto bälder, je grösser sie in Ansehung der andern ist; im zweyten Falle entfernet man sich immer mehr davon, und zwar desto mehr, je grösser c in Ansehung b ist. Im dritten Falle bleibt man immer in einer gleichen Entfernung vom wahren Werthe. Darum werden die Reihen der ersten Art zusammenlaufende, convergirende, convergente Reihen; die der zweyten, auseinanderlaufende, divergirende, divergente; die der dritten Art gleichlaufende, oder parallele genannt.

I. a) Man wird gleich überzeugt seyn, daß sich dieses so verhalte, wenn man für die Buchstaben Ziffern setzt. Es sey für den ersten Fall $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$. Es wird also aus der Reihe von $\frac{a}{b+c}$ $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. $\frac{ac}{b^2} = \frac{1}{4} = \frac{ac^2}{b^3} = \frac{1}{8}$. $\frac{ac^3}{b^4} = \frac{1}{16}$. $\frac{ac^4}{b^5} = \frac{1}{32}$ 2c., und die ganze Reihe ist.

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} \text{ 2c.}$$

Der Werth des Bruches ist $\frac{1}{3}$. Und mit jedem Gliede kömmt die Reihe demselben näher.

Das erste Glied ist $\frac{1}{2}$. Nun ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. Dieser Werth ist zu groß um $\frac{1}{6}$.

Die

Die zwey ersten Glieder $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Nun ist $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$. Dieser Werth ist nur um $\frac{1}{12}$ zu klein. Drey Glieder machen $\frac{3}{8}$. $\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{9}{24} - \frac{8}{24} = \frac{1}{24}$. Um so viel ist der Werth zu groß.

b) Es sey für den zweyten Fall $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$, und die ganze Reihe ist:

$\frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$. $\frac{ac}{b^2} = \frac{1 \times 2}{1} = 2$. $\frac{ac^2}{b^3} = 4$. $\frac{ac^3}{b^4} = 8$ rc. oder

$1 - 2 + 4 - 8$ rc. Wo ich mit jedem Gliede mich von dem Werthe von $\frac{1}{3}$ mehr entferne.

c) Es sey für den dritten Fall $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}}$ oder $\frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{2}{3+3}$, so wird in der Reihe $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. $\frac{ac}{b^2} = \frac{6}{9}$. $\frac{ac^2}{b^3} = \frac{18}{27}$. $\frac{ac^3}{b^4} = \frac{54}{81}$ oder

$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ rc. Wo der Werth immer um $\frac{1}{3}$ zu viel oder zu wenig ist.

II. Nun wollen wir den Bruch $\frac{a}{b-c} = \frac{1}{3}$ setzen, und auf diese Art behandeln. Daß man ihn auf unendlich vielerley Arten ausdrücken könne, ist klar, wenn nur die Differenz $b - c = 3$ bleibt, z. B. $\frac{1}{4-1}$, $\frac{1}{5-2}$, $\frac{1}{6-3}$ oder $\frac{1}{-1+4}$, $\frac{1}{-2+5}$. Es sey für den ersten Fall $b > c$. $\frac{1}{4-1}$.

a

$\frac{a}{b-c} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4-1}$. Die Reihe wird, weil $a=1$, $b=4$. $c=-1$, welches negativ genommen werden muß $=1$.

$\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$. $\frac{ac}{b^2} = \frac{1}{16}$. $\frac{ac^2}{b^3} = \frac{1}{64}$. $\frac{ac^3}{b^4} = \frac{1}{256}$ ꝛc.
und die Reihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ ꝛc.

Das erste Glied $\frac{1}{4}$ fehlt von $\frac{1}{3}$ um $\frac{1}{12}$

Die zwey ersten Glieder $\frac{5}{16}$ fehlen von $\frac{1}{3}$ um $\frac{1}{48}$

Die ersten drey Glieder $\frac{21}{64}$ fehlen von $\frac{1}{3}$ um $\frac{1}{192}$.

Der Werth der Reihe ist also allzeit weniger, als ein Drittel, doch vermindert sich der Abgang immer.

III. Wir wollen noch für den Fall $b=c$, für den Bruch $\frac{a}{b+c}$ eine Reihe in Zahlen suchen. Der Bruch sey $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

$\frac{a}{b} = 1$ $\frac{ac}{b^2} = 1$, $\frac{ac^2}{b^3} = 1$ u. s. w. Die Reihe ist nach der Formel von $\frac{a}{b+c}$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ ꝛc.

Das erste Glied 1 ist größer, als der Bruch $\frac{1}{2}$ um $\frac{1}{2}$

Die zwey ersten Glieder $=0$ sind zu klein um $\frac{1}{2}$

Die drey ersten Glieder $=1$ sind zu groß um $\frac{1}{2}$

Die

Die vier ersten Glieder = o sind wieder zu klein um $\frac{1}{2}$.

90. Hieraus lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Erstens, ist b und c positiv, und b>c, so nähert sich die Reihe dem wahren Werthe eines Bruches immer mehr; und wenn die Zahl der Glieder gerade ist, ist die Summe aller Glieder kleiner; ist sie ungerade, größer, als der Werth des Bruches (§. 89. I. a). Zweytens, ist im nemlichen Falle c>b, so entferne ich mich mit jedem Gliede mehr vom Werthe des Bruches (§. 89. I. b). Drittens, ist b=c, so giebt die Summe, wenn die Zahl der Glieder gerade ist, um die nemliche Quantität den Werth des Bruches zu klein an, um welche sie ihn bey der ungeraden Zahl der Glieder zu groß angiebt (§. 89. I. c).

Ist im Bruch $\frac{a}{b-c}$, b>c, so ist die Summe aller Glieder der Reihe immer kleiner, als der Bruch; aber der Abgang wird mit jedem Gliede geringer (§. 89. II.).

a) Würde man b und c für jeden Fall merklich der Größe nach verschieden annehmen, so würde man finden, daß sich die Reihe dem wahren Werthe des Bruches desto geschwinder nähere, je größer b in Ansehung c ist; das umgekehrte würde erfolgen, wenn c merklich größer, als b angenommen würde. Ich setze keine Beyspiele her, damit man sich selbst üben könne.

b) Man

b) Man kann jede divergirende Reihe leicht in eine convergirende verwandeln, wenn man nur die Reihe des Nenners verwechselt, und statt $\frac{1}{1+2}$ schreibt $\frac{1}{2+1}$.

c) Man kann sowohl bey divergirenden, als parallelen Reihen den ganzen Werth des Bruches finden. **Bey divergirenden.** Man theile was immer für ein Glied der Reihe durch den Nenner des Bruches, den man in eine Reihe aufgelöst hat, und den Quotienten addire man zur Summe aus einer geraden Anzahl der vorhergehenden Glieder, oder ziehe ihn von der Summe einer ungeraden Anzahl Glieder ab. Allzeit wird der gegebene Bruch herauskommen. Es sey die Reihe des Bruches $\frac{1}{3}$ (§. 89. I. b) $1-2+4-8$ 2c.

Das erste Glied $= -1\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Die zwey ersten Glieder $= -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

Die drey ersten Glieder $= 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ u. s. f.

Die Summe der ersten zwey Glieder $= 3$.

Bey parallelen Reihen. Man dividire was immer für ein Glied der Reihe durch den Nenner des gegebenen Bruches, und addire, wenn die Anzahl der vorhergehenden Glieder gerade ist, den Quotienten dazu, oder subtrahire ihn, wenn sie ungerade ist. Die Summe stellt den gegebenen Bruch wieder her. Wir nehmen §. 89. III. die Reihe des Bruches $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ 2c.

Zwey

Zwey Glieder = 0; das dritte dividirt mit 2 giebt die Summe $0 = + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Drey Glieder = 1. Das vierte dividirt mit 2, und subtrahhirt davon giebt $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ u. s. w.

Viertes Hauptstück.

Die Rechenkunst mit Potenzen, und Wurzeln.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

Eine jede Grösee für sich selbst, und allein betrachtet, ist eine einfache Größe, z. B. 1, 2, 3, a, b, c. Vergleiche ich sie aber mit dem Producte, das heraus kömmt, wenn sie mit sich selbst ein- oder mehrmal multiplicirt wird, so heißt sie die **Wurzel** in Ansehung des Productes, und das Product heißt die **Potenz**, **Würde**, **Dignität** derselben. Man nennet auch die einfache Größe in Ansehung der Producte die erste **Potenz**, **Dignität**, oder **Würde**. Z. B.

$$
\begin{array}{llll}
 & 2. & 2\times2=4 & 2\times2\times2=8 & 2\times2\times2\times2=16 \\
 & a. & a\times a=a^2 & a\times a\times 2=a^3 & a\times a\times a\times a=a^4 \\
\text{oder} & 3. & 3\times3=9 & 3\times3\times3=27 & 3\times3\times3\times3=81 \\
 & b. & b\times b=b^2 & b\times b\times b=b^3 & b\times b\times b\times b=b^4
\end{array}
$$

Hier ist 2 die erste Dignität, oder Wurzel von 4, 8, 16; 3 von 9, 27, 81, a von a^2, a^3, a^4, b von

b von b^2, b^3, b^4. Hingegen 4, 8, 16 in Ansehung 2; 9, 27, 81 in Ansehung 3; a^2, a^3, a^4, b^2, b^3, b^4, in Ansehung a, b sind Potenzen. Und zwar 4, 9, a^2, b^2 die zweyte Potenz, oder das Quadrat, weil die Größen 2, 3, a, b nur einmal mit sich selbst multiplicirt worden, 8, 27, a^3, b^3 die dritte Potenz, oder der Cubus, weil die nemlichen Größen zweymal mit sich selbst multiplicirt worden. Und so fort. Die erste Potenz wird auch in Ansehung des Quadrats die Quadratwurzel, in Ansehung des Cubus die Cubikwurzel, in Ansehung der vierten Potenz die vierte Wurzel, u. s. w. genannt.

Das Wurzelzeichen überhaupt ist $\sqrt{}$, und gilt zugleich als das Zeichen der Quadratwurzel. Um die Cubik, vierte, fünfte ꝛc. Wurzel anzuzeigen, oder überhaupt die Wurzel *n* anzudeuten schreibt man $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[n]{}$.

Wir haben hier zweyerley zu lernen, erstens, wie man jede gegebene Größe zur verlangten Potenz erheben; zweytens, wie man aus jeder Potenz die verlangte Wurzel ausziehen kann.

Zweyter Abschnitt.

Von Erhebung der Größen zur verlangten Potenz.

92. Jede Größe zur verlangten Potenz zu erheben, multiplicire man selbe so oft mit sich selbst, als es der Exponent der Potenz anzeigt, weniger einmal (§. 80.).

a) Soll man also z. B. 4 zur dritten Potenz erheben, so multiplicire man 4 zweymal mit sich selbst, oder $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$. $26^2 = 676$. $35^3 = 35 \times 35 \times 35 = 42875$. $91^4 = 91 \times 91 \times 91 \times 91 = 68574961$, $5^7 = 78125$.

b) Auch die Potenzen von Brüchen erhält man nach der nemlichen Regel. $\frac{1^2}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. $\frac{2^3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$.

c) Endlich algebraische Größen werden eben so zu Potenzen erhoben. $(2ab)^2 = 4\,a^2b^2$, oder $2ab \times 2ab$. $(5cdf)^3 = 125c^3d^3f^3$. oder überhaupt $(ab)^m = a^m\,b^m$.

d) Hat die Größe, die zu einer Potenz erhoben werden soll, schon einen Exponenten, so wird dieser mit dem Exponenten der verlangten Potenz multiplicirt. Denn nach den Regeln der Multiplication (§. 85. IIII.) werden die Exponenten gleicher Buchstaben addirt, wenn diese miteinander multiplicirt werden sollen. Nun werden hier gleiche Buchstaben miteinander ein, zwey, drey, viermal multiplicirt: Also müssen die Exponenten so oft addirt werden, als der Exponent der verlangten Potenz Einheiten hat, d. i. der Exponent des Buchstabens muß mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt werden. $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times3} = a^6$. $(a^5b^2)^5 = a^{25}b^{10}$. $\left(\frac{c^2b^3}{a^3f^4}\right)^4 = \frac{c^8b^{12}}{a^{12}f^{16}}$. $\left(\frac{a^2b^m}{c^de^3}\right)^n = \frac{a^{2n}b^{mn}}{c^{dn}e^{3n}}$

e) Ent=

e) Enthält die zu erhebende Größe mehrere Glieder, so wird sie nach den Gesetzen der algebraischen Multiplication so oft, weniger einmal, mit sich selbst multiplicirt, als der Exponent der Potenz Einheiten hat. Z. B. $(a - b^2)^2$

$$\begin{array}{l} a - b^2 \\ a - b^2 \\ \hline a^2 - ab^2 \\ \quad - ab^2 + b^4 \\ \hline a^2 - 2ab^2 + b^4 \end{array}$$

Die dritte Potenz von

$$\begin{array}{l} a + b + 2c \\ a + b + 2c \\ \hline a^2 + ab + 2ac + b^2 + 2bc \\ \quad + ab + 2ac \quad + 2bc + 4c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + 4ac + b^2 + 4bc + 4c^2 \\ a + b + 2c \\ \hline a^3 + 2a^2b + 4a^2c + ab^2 + 4abc + 4ac^2 + \\ b^3 + 4b^2c + 4bc^2 \\ \quad + a^2b + 2a^2c + 2ab^2 + 4abc + 8ac^2 + \\ \quad 2b^2c + 8bc^2 \quad + 8c^3 \\ \quad\quad + 4abc \\ \hline a^3 + 3a^2b + 6a^2c + 3ab^2 + 12abc + 12ac^2 + \\ 8bc^2 + 8bc^2 + b^3 + 8c^3. \end{array}$$

Weil weiter unten eine allgemeine Regel jedes Polynomium zur verlangten Potenz zu erheben vorkommen wird, will ich hier nur noch ein einziges Beyspiel anführen, welches dieß gegenwärtige Verfahren erläutern kann. Man soll 6 zur dritten Potenz erheben, welche 216 ist. Schreib statt 6, $1 + 2 + 3$.

$$\begin{array}{r} 1+2+3 \\ 1+2+3 \\ \hline 1+2+3 \\ 2+4+6 \\ 3+6+9 \\ \hline 6+12+18 \\ 1+\ \ 2+\ \ 3 \\ \hline 6+12+18 \\ 12+24+36 \\ 18+36+54 \\ \hline 36+72+108 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ =36=6^2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ =216=6^3 \end{array}$$

93. Um das folgende zu verstehen, ist es nöthig, noch einige algebraische Ausdrücke zuvor zu erklären, von denen wir sogleich Gebrauch machen werden. Daß $a^0 = 1$, ist §. 86. Reg. III. a bewiesen worden. $a^{-m} = a^{\frac{1}{m}}$. (Ebend. b) und $a^{\frac{1}{-2}} = a^2$ (c). Aber was bedeuten gebrochene Exponenten z. B. $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, oder $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{2}{3}}$, oder überhaupt $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{-m}{n}}$?

Man multiplicire den Exponenten von $a^{\frac{1}{2}}$ mit 2, so erhält man $a^{\frac{1 \times 2}{2}} = a^1$. Den Exponenten einer Größe mit 2 multipliciren, heißt ihn zur zweyten Potenz erheben (§. 92. d). Also ist a die zweyte Potenz von $a^{\frac{1}{2}}$, und $a^{\frac{1}{2}}$ ist die Quadratwurzel von a. Eben so findet man allgemein die Bedeutung von $a^{\frac{m}{n}}$. Denn $a^{\frac{m \times n}{n}} = a^m$. Also ist $a^{\frac{m}{n}}$ die Wurzel n der

Potenz

Potenz m. Daraus ergiebt sich die allgemeine Regel: Eine Größe mit einem gebrochenen Exponenten ist die Wurzel, welche der Nenner anzeigt, von der Potenz, die der Zähler anzeigt.

a) Die Quadratwurzel von a wird so angezeigt: $\sqrt{a}$ (§. 91.). Eben diese Quadratwurzel wird auch durch den Ausdruck $a^{\frac{1}{2}}$ bezeichnet, wie wir eben gesehen haben. Also ist $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, und so auch $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2}$. $c^{\frac{3}{4}}\, d^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{c^3\, d^2}$.

b) $a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$. Es ist aber $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (§. 86. dritte Reg. b). Also ist $a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. $36^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{36^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

93. Eine allgemeine Regel zu finden, jedes Binomium auf eine verlangte Potenz zu erheben. Man nennet diese Auflösung den Binomischen Lehrsatz, den der große Mathemathiker Isaak Newton erfunden hat. Er taugt aber nicht nur ein Binomium, sondern jedes Polynomium zu erheben; wenn man mehrere Glieder für eines gelten läßt, und so das Polynomium in zween Theilen vorstellet. Z. B. Das Polynomium wäre $2x^2 - 4d + 3c$. Man läßt $2x^2 - 4d$ für a, und $3c$ für b gelten. Hat

man nun für die Erhebung von $a + b$ eine Formel gefunden, so darf man nur ihre Werthe $2x^2 - 4d$, und $3c$ substituiren.

Der binomische Lehrsatz ist bloß durch die Erhebung von $a + b$ zu verschiednen aufeinander folgenden Potenzen, und die davon abgezogenen Beobachtungen entdeckt worden. Man kann zwar selbigen jetzt auch strenge beweisen. Aber der Beweis ist nicht für Anfänger, mit denen ichs zu thun habe. Ich will daher nur den Weg zeigen, wie man auf diesen Lehrsatz verfallen kann. Man erhebe das Binomium $a + b$ nach und nach zu den aufeinander folgenden Potenzen, wie §. 92. e. gezeigt worden, so wird man finden.

I. Potenz $a + b$.
II. . . $a^2 + 2ab + b^2$.
III. . . $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
IIII. . . $a^4 + 4a^3b + 6a^2 + b^2 + 4ab^3 + b^4$.
V. . . $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
VI. . . $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. u. s. w.

Betrachtet man diese Potenzen etwas genauer, so entdecket man:

Erstens, daß das erste Glied die verlangte Potenz von a, und jedes folgende die nächst niedrigere enthält, nur das letzte nicht. Hingegen enthält das zweyte Glied allzeit die erste Potenz von b, und mit jedem folgen-

folgenden Gliede wachsen die Potenzen um eins, das letzte endlich enthält b in der verlangten Potenz.

Die Producte also, welche von Buchstaben bey der Erhebung eines Binomiums zu einer Potenz vorkommen, sind folgende, z. B. bey der sechsten Potenz.

$a^6.$	$a^5.$	$a^4.$	$a^3.$	$a^2.$	$a^1.$	
	$b^1.$	$b^2.$	$b^3.$	$b^4.$	$b^5.$	$b^6.$
$a^6.$	$a^5 b.$	$a^4 b^2.$	$a^3 b^3.$	$a^2 b^4.$	$a b^5.$	$b^6.$

Wo kein Coefficient steht, versteht man 1. Nun ist $1 = a^0 = b^0$. Wenn man also die Buchstaben Producte von einer jeden verlangten Potenz des Binomiums $a + b$ sogleich finden will, so schreibe man a mit dem Exponenten der verlangten Potenz an, und dann für jedes folgende Glied vermindere man den Exponenten von a um eins, bis endlich $a^0 = 1$ kömmt, welches auch noch angeschrieben wird. Unter diese Reihe schreibe man die Potenzen von b, indem man unter die höchste Potenz von a, b^0 setzt, und lasse mit jedem folgenden Gliede den Exponenten um 1 wachsen, bis er unter a^0 dem Exponenten der verlangten Potenz gleich wird. Endlich multiplicire man jede zween übereinanderstehende Buchstaben, so erhält man die Litteralproducte. Z. B. Es soll $a + b$ zur siebenten Potenz erhoben werden.

$a^7.$	$a^6.$	$a^5.$	$a^4.$	$a^3.$	$a^2.$	$a^1.$	$a^0.$
$b^0.$	$b^1.$	$b^2.$	$b^3.$	$b^4.$	$b^5.$	$b^6.$	$b^7.$
$a^7.$	$a^6 b.$	$a^5 b^2.$	$a^4 b^3.$	$a^3 b^4.$	$a^2 b^5.$	$a b^6.$	$b^7.$

Zweytens, daß die verlangte Potenz immer ein Glied mehr, als ihr Exponent Einheiten habe. Die zweyte Potenz hat drey, die dritte vier Glieder, u. s. w.

Drittens, daß das erste und letzte Glied einer ordentlich angeschriebenen Potenz keinen Coefficienten, als nur 1 hat.

Viertens, daß der Coefficient eines jeden Gliedes gleich sey dem Product aller vor ihm gehenden Exponenten von a, dividirt durch das Product aller vorhergehenden Coefficienten von b, den des Gliedes mitgerechnet; denn z. B. in der sechsten Potenz

Ist der Coefficient des ersten Gliedes $= 1$

Des zweyten Gliedes $6\,a^5 b$, $\frac{6}{1} = 6$

Des dritten Gliedes $15\,a^4 b^2$, $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$

Des vierten Gliedes $20\,a^3 b^3$, $\frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = \frac{120}{6} = 20$.

Des fünften Gliedes $15\,a^2 b^4$, $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 15$

Des sechsten Gliedes $6\,a\,b$, $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 6$.

94. Heißt die Potenz, zu welcher $a + b$ erhoben werden soll, m, so muß man sie so anschreiben: $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3}$

a

$a^{m-3} b^3 + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{m-4} b^4$

$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$

$a^{m-5} b^5$ 2c.

Diese Reihe wird aufhören, wann der Exponent von a wird $m - m$ werden; denn das nächste Glied bekäme, da der Exponent des vorhergehenden ein Factor des Coefficienten des nächsten Gliedes wird, weil $m - m = 0$, zum Factor, 0. Alles aber, was mit 0 multiplicirt wird, wird 0. Z. B. Wenn $m = 3$, so finde ich, daß vier Glieder seyn müssen, nemlich $a^3 \times 3a^2 b \times 3ab^2 \times b^3$. Wollte ich ein fünftes Glied suchen, so wäre selbiges $3 \times 2 \times 1 \times 0 b^{m+1} = 0$.

95. Es ist aber $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$, a^{m-3}

$= \frac{a^m}{a^3}$ 2c. (§. 86. dritte Reg. b). Diesen Werth setze man in der allgemeinen Formel des vorhergehenden §. so bekömmt man sie folgender Gestalt: $a^m + \frac{m a^m}{1}$

$\frac{b}{a} + \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} \frac{a^m b^2}{a^2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3}$

$\frac{a^m b^3}{a^3} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \frac{a^m b^4}{a^4}$ 2c.

 Denn

Denn z. B. das zweyte Glied $\frac{m}{1} a^m \frac{b}{a}$ ist so viel, als

$m \times \frac{a^m}{a} \times b$.

96. Man setze endlich $a^m = A$, $\frac{b}{a} = Q$, so wird in der Formel $a^m = A$.

Das zweyte Glied $\frac{m}{1} a^m \frac{b}{a} = \frac{m}{1} A Q$. Dieses ganze Glied sey $= B$.

Das dritte Glied $\frac{m \times m - 1}{1 \times 2} a^m \frac{b^2}{a^2}$, weil zum Vorhergehenden nur neuerdings hinzugekommen $\frac{m-1}{2} = \frac{b}{a}$ wird seyn $\frac{m-1}{2} BQ$. Das nenne man, wenn es gefunden ist, C, so ist das folgende aus der nemlichen Ursache $\frac{m-2}{3} CQ$. Und so, wenn man immer das vorhergehende Glied mit einem neuen großen Buchstaben benennet, wird die ganze Formel

$$a^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ +$$

$\frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ$ u. s. w. Man fährt nemlich so lange fort, bis die Factoren vom Coefficienten mit $m - m$ multiplicirt werden sollen.

a) So

a) So zusammengesetzt diese Formel scheint, so einfach ist sie doch bey dem Gebrauche. Es soll zum Beyspiel die vierte Potenz von 542 gefunden werden. Man mache aus 542 ein Binomium $= 500 + 42$.

$a = 500$
$b = 42$
$\frac{b}{a} = Q = \frac{42}{500} = \frac{21}{250}$
$m = 4$

$a^m =$	- -	$62500000000 = A$
$mAQ =$	- -	$21000000000 = B$
$\frac{m-1}{2}BQ =$	- -	$2646000000 = C$
$\frac{m-2}{3}CQ =$	- -	$148170600 = D$
$\frac{m-3}{4}DQ =$	- -	$3111696 = E$
		86297287696.

Oder es sey $542 = 2 + 540$

$a = 2$
$b = 540$
$\frac{b}{a} = \frac{540}{2} = 270 = Q.$
$m = 4.$

$a^m =$	- - - -	$16 = A$
$mAQ =$	- - - -	$17280 = B$
$\frac{m-1}{2}BQ =$	- -	$6998400 = C$
$\frac{m-2}{3}CQ$	- -	$1259712000 = D$
$\frac{m-3}{4}DQ$	-	$85030560000 = E$
		86297287696 wie oben.

b) Wird

b) Wird der erste Theil des Binomiums, oder a in Ansehung b recht klein, und so zugleich angenommen, daß $\frac{b}{a} = Q$ keinen Bruch in Zahlen giebt, so erleuchtert man sich die Arbeit sehr.

Soll man ein algebraisches Binomium zur verlangten Potenz erheben, so verfährt man gerade so. Es soll $2d + 3x - c$ zur dritten Potenz erhoben werden.

$a = 2d$

$b = 3x - c$

$\frac{b}{a} = \frac{3x - c}{2d} = Q.$

$m = 3.$

a^m - - - - - - $8d^3 = A$

mAQ - - - $36d^2x - 12cd^2 = B$

$\frac{m-1}{2}BQ$ $54dx^2 - 36cdx - 6c^2d = C$

$\frac{m-2}{3}CQ$ $27x^3 - 18cx^2 + 9c^2x - 27cx^2 - c^3 = D.$

$$8d^3 + 36d^2x - 12cd^2 + 54dx^2 - 36cdx + 6c^2d + 27x^3 - 45cx^2 + 9c^2x - c^3.$$

c) Ist die zu erhebende Größe ein Bruch, so muß sowohl Zähler als Nenner zur verlangten Potenz erhoben werden (§. 92. b). Doch kann man sich die Arbeit abkürzen, wenn man einen gemeinen Bruch zu zuvor in einen Decimalbruch verwandelt (§. 71).

Dritter

Dritter Abschnitt.

Von Ausziehung der Wurzeln.

97. Jede Größe kann man für was immer für eine Potenz ansehen. So kann 2 als die erste, zweyte, dritte, vierte Potenz rc. betrachtet werden, und eben so jede andere andere Zahl; und es läßt sich wirklich eine andere Zahl finden, die so oft weniger einmal mit sich selbst multiplicirt, als der Exponent der Potenz anzeigt, diese Zahl entweder vollkommen, oder doch so nahe, als man selbst verlangt, hervorbringt. Betrachte ich Zwey als ein Quadrat, so ist 1,4142135 diejenige Zahl, die einmal mit sich selbst multiplicirt, 1,99999962358225, das ist, beynahe 2 giebt. Nimmt man aber 1,4142136, und multiplicirt sie mit sich selbst, so erhält man das Quadrat 2,00000010642496, welches näher bey 2 ist, als das vorhergehende.

Die Beschaffenheit unserer Zahlen ist die Ursache, daß man nicht von jeder Potenz die Wurzel genau angeben kann, welche durch wiederholte Multiplication die Potenz vollkommen herstellte. In den ersten neun Zahlen sind nur 1, 4, 9 vollkommene Quadrate, deren Wurzeln sich finden lassen. Nur 1 und 8 sind vollkommene Cubi. Aber 2, 3, 5, 6, 7 sind keine vollkommene Quadrate, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 keine vollkommenen Cubi. Von höhern Potenzen giebt es in diesen 9 Zahlen gar keine Wurzeln, als die Einheit; denn alle Potenzen von 1 sind 1, und 1 ist auch die Wurzel aller Potenzen von 1.

98. Größen, aus denen sich die Wurzel vollkommen ausziehen läßt, heißen rationale, oder commen-

mensurable Größen. Die Ursache beyder Benennungen ist diese. Weil die Potenz genau ein Vielfaches der Wurzel ist, so läßt sich auch das Verhältniß der Potenz zur Wurzel genau ausdrücken. Man kann sagen: Die Potenz ist genau dieß, oder jenes Vielfache der Wurzel. Darum heißen solche Größen rational. Eben so kann die Wurzel als Maaßstab gebraucht werden, die Potenz genau auszumessen, oder Wurzel und Potenz lassen sich mit einem Maaßstabe messen, der in der Wurzel einmal, in der Potenz öfter genau enthalten ist. Darum nennet man solche Größen commensurabel. Läßt sich aber die Wurzel aus einer Größe nicht genau ausziehen, so heißt sie eine irrationale, incommensurale, surde Größe in Ansehung der Wurzel. So sind $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$ commensurable, oder rationale, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{9}$ irrationale Größen.

99. Es giebt überdieß noch eingebildete, unmögliche Wurzeln, radices impossibiles, imaginarias. Sie führen diesen Namen, weil die Potenzen, von denen sie Wurzeln seyn sollen, nicht möglich, und nur eingebildet sind. Es kann keine gerade negative Potenz geben; denn die Wurzel mag $+a$, oder $-a$ seyn, so entsteht daraus allzeit $+a^2$, $+a^4$, $+a^6$ ꝛc. Denn $+a \times +a$ ist $= a^2$, und $-a \times -a$ auch $= a^2$. Ein Product $-a^2$ aus $-a \times +a$ ist kein eigentliches Quadrat, weil da nicht die Wurzel mit sich selbst multiplicirt worden, welches doch bey

Erhe-

Erhebung einer Größe zu einer Potenz geschehen muß; denn $+a$ ist etwas anderes, als $-a$.

a) $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-6}$, $\sqrt[6]{-2}$, $\sqrt[8]{-a}$ sind also lauter eingebildete Wurzeln. Hingegen $\sqrt[3]{-a^3}$, $\sqrt[5]{-b}$ sind keine eingebildete Wurzeln; denn $-a \times -a \times -a$ giebt wirklich zum Cubus $-a^3$.

b) Wenn gleich $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$, als **Potenzen betrachtet** etwas unmögliches sind, so sind sie doch **als einfachen Größen betrachtet** nicht unmöglich; denn $-a^2$ entsteht wirklich aus der Multiplication zwoer möglichen Größen, aus $+a \times -a$. Von dieser wichtigen Bemerkung werden wir unten beym Radicalcalcul Gebrauch machen.

100. Wie kann man nun aus allen rationalen, und irrationalen Größen, sie mögen aus Zahlen, oder Buchstaben bestehen, die verlangte Wurzel ausziehen? Wir wollen hernach eine allgemeine Regel für die Ausziehung aller Wurzeln geben. Hier reden wir insbesondere von Ausziehung der Quadrat und Cubikwurzel aus Zahlen, und aus rationalen algebraischen Größen.

101. Um die Art zu finden, wie man die Quadratwurzeln aus rationalen Größen ausziehen soll, müssen wir zuvor die Eigenschaften eines Quadrates überhaupt untersuchen. Es stelle $a+b$ eine Größe vor, die zum Quadrat erhoben werden soll, und, um sogleich die Eigenschaften eines Quadrates in einem besondern Exempel zu sehen, sey $a=2$, $b=3$, oder 5 soll zum Quadrate erhoben werden.

$a+b$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2+3 \\ 2+3 \\ \hline 4+2\times3 \\ \;\;+2\times3+9 \\ \hline 4+4\times3+9=25. \end{array}$$

Hieraus ersieht man, daß ein jedes Quadrat ($a+b$ stellet jede Quadratwurzel vor) bestehe erstens aus dem Quadrat des ersten Theiles, a^2, zweytens aus dem doppelten Producte eines Theiles in den andern, $2\times ab$, drittens aus dem Quadrat des zweyten Theiles, b^2.

102. Will man nun aus einem gegebenen Quadrat die Wurzel wieder finden, aus deren Multiplication mit sich selbst es entstanden ist, so geht man umgekehrt zu Werke. Man suchet nemlich, indem man jede Wurzel als zweytheilig vorstellet, zuerst das Quadrat des ersten Theiles, a^2, nimmt davon die Wurzel a, mit dem Doppelten derselben, nemlich mit $2a$, dividirt man das übrige, nachdem man zuvor a^2 vom ganzen Quadrat abgezogen hat. Dieß übrige ist also noch $2ab+b^2$. Dividirt man $2ab$ mit $2a$, so ist der Quotient b. Machet man nun, da man die zween Theile der Wurzel, a und b hat, daraus $2ab+b^2$, und zieht dieß von $2ab+b^2$ ab, so bleibt nichts, wenn die Wurzel wirklich $a+b$ ist.

Ich will dieses in einem ausführlichen Exempel zeigen, und alle besondern Regeln deutlich vortragen. Es soll die Quadratwurzel aus 529 ausgezogen werden. Diese wollen wir als bekannt annehmen (sie ist 23) und sehen, wie daraus das Quadrat entstanden ist.

$20+3$

$$\begin{array}{l} 20+3 \\ 20+3 \\ \hline 400+3\times 20 \\ \quad +3\times 20+9 \\ \hline 400 \\ 120 \\ \quad 9 \\ \hline 529. \end{array}$$

In der ersten Ziffer steckt nicht nur das Quadrat des ersten Theiles 20, nemlich 400, sondern auch noch 100 von dem zweyfachen Product eines Theiles in den andern. So geschieht es auch oft, daß vom Quadrate des zweyten Theiles, das nicht immer nur aus einer einzigen Ziffer, wie hier, besteht, schon einige Ziffern in den vorhergehenden Ziffern vorkommen, wie es geschehen wäre, wenn man statt 20+3 die Wurzel 3+20 gesetzt hätte.

Erste Regel. Man theile die Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen von zwo Ziffern ein. In der ersten Classe zur Linken wird oft nur eine Ziffer stehen.

Die Ursache davon ist, weil die Wurzel aus so vielen Ziffern bestehen muß, als solche Ziffernpaare da sind. Das Quadrat einer Zahl von 1 bis 9 kann nur aus zwoen Ziffern bestehen. Denn das Quadrat von der ersten Wurzel, die aus zwoen Ziffern besteht, nemlich 10, hat erst drey Ziffern, nemlich 100. Da nun jeder Theil der Wurzel nur eine Ziffer ist, kann

er nur in einem Paar Ziffern enthalten seyn. Folglich ist in jedem Paare ein Theil der Wurzel.

Zweyte Regel. Weil in dem ersten Paare, von der Linken aus zu rechnen, das Quadrat des ersten Theiles der Wurzel enthalten ist, oder auch in der ersten einzelnen Ziffer, so sehe man, ob diese erste Ziffer, oder das erste Zifferpaar ein Quadrat sey, oder nicht. Ist es eines, so setze man dessen Wurzel als Quotienten an. Ist es kein Quadrat, so nehme man das nächst kleinere, und setze dessen Wurzel als Quotienten, das Quadrat aber der Wurzel wird in beyden Fällen unter das erste Zifferpaar, oder unter die erste Ziffer gesetzt, wenn nur eine da ist, und davon abgezogen.

Die ersten 9 Quadrate der einfachen Zahlen weis man aus dem Einmaleins, nemlich

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9.
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

In unserm Exempel

$$\begin{array}{l} 5.29 \\ \underline{4} \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a \\ 2 \\ \end{array} \right.$$

ist 4 das nächst kleinere Quadrat, als 5, und dessen Wurzel 2. 2 ist also der erste Theil der Wurzel $= a$

Die dritte Regel. Es mag kein, oder ein Rest geblieben seyn, so setzt man das nächstfolgende Ziffernpaar herab. In diesen Ziffern muß jetzt noch $2ab + b^2$ ent-

enthalten seyn; weil von der Formel des ganzen Quadrats $a^2 + 2ab + b^2$ schon a^2 abgezogen worden. Damit ich nun auch das zweyte Glied der Quadratwurzel, b, finde, muß ich sie mit 2a dividiren; denn $\frac{2ab}{2a} = b$. Läßt sich nun $2ab + b^2$ abziehen, ohne daß ein Rest übrig bleibe, so habe ich die wahre Quadratwurzel gefunden. Darum nimmt man das gefundene a doppelt, und schreibt es so, daß es, oder dessen letzte Ziffer unter die vorletzte Ziffer des Dividends zu stehen komme, und unter die letzte schreibt man das gefundene b. Nun multiplicirt man mit b den ganzen so angeschriebenen Divisor, der jetzt $2a + b$ ist. Das Product giebt also $2ab + b^2$. In unserm Exempel blieb Rest 1, nach Herabsetzung des Zifferpaares wird der Dividend

```
        ⎧ab
    129 ⎨23   .   2a=4
     43 ⎩
    129
    ───
      0
```

Weil nun nichts übrig bleibt, ist die Quadratwurzel von 529 gefunden, nemlich 23.

Die vierte Regel. Folgen aber noch mehrere Ziffernpaare, so setzt man das nächste Paar wieder herab, und verfährt ganz nach der dritten Regel, nur daß man jetzt beyde gefundenen Ziffern der Wurzel zusammen für a gelten läßt, oder wenn es mehr sind, jederzeit die ganze schon gefundene Zahl. Die Ursache ist, weil das erste Glied einer Wurzel nicht immer nur,

wie in dem gegebenen Exempel, aus Zehnern allein be- steht. Es kann auch Hunderter, Tausender rc. ent- halten, wenn man es mit a + b vergleicht. Ich will noch ein paar Exempel zur Uebung ausführlich her- setzen. Um sich aber selbst üben zu können, multipli- cire man die nächste die beste Zahl mit sich selbst, und sehe dann zu, ob man aus dem Producte nach den ge- gebenen Regeln die nemliche Wurzel wieder finde. Z. B. Man suche die Quadratwurzel von 201601 und von 996004.

```
20,16,01 [ 449          99.60.04 [ 998
16                      81
--------                --------
 416                    1860
  84                     189
 336                    1701
--------                --------
  8001                   15904
   889                    1988
  8001                   15904
--------                --------
    0                       0
```

103. Weil die wenigsten Zahlen vollkommene Quadrate sind, und also, nachdem man die Wurzel so weit ausgezogen, als es angieng, noch ein Rest bleibt, so setzt man diesem, so oft man will, zwo Nul- len bey, und verfährt übrigens nach der dritten Regel. Die auf diese Art gefundenen Ziffern schneidt man durch das Decimalzeichen von den übrigen ab. Auf diese Art kann man die Wurzel so nahe erhalten, als man will, je mehr man nemlich Decimalstellen sucht. Eine andere allgemeine Art, Quadrat, ja alle Wur- zeln

zeln durch die Annäherung auszuziehen wird hernach gezeigt werden. Hier nur ein Exempel. Man suche die Quadratwurzel von 24.

```
24 [4,8989 rc.
16 [
---
 800
  88
 704
---
  9600
   969
  8721
---
  87900
   9788
  78304
---
   959600
    97969
   881721
---
    77879 rc.
```

Multiplicirt man die gefundene Wurzel mit sich selbst, so kömmt das Product 23,99922121, welches beynahe 24 ist.

104. Aus algebraischen Größen zieht man die Quadratwurzeln nach den nemlichen Regeln. Es sey gegeben

$$9a^2+30ab-12acd+25b^2-20bcd+4c^2d^2.$$
$$\begin{array}{l} 9a^2 \qquad\qquad\qquad \Big| 3a+5b-2cd \\ -9a^2 \\ \hline 30ab-12acd+25b^2 \\ 6a+5b \\ 30ab+25b^2 \\ -30ab-25b^2 \\ \hline -12acd-20bcd+4c^2d^2 \\ 6a+10b-2cd \\ -12acd-20bcd+4c^2d^2 \\ +12acd+20bcd-4c^2d^2. \\ \hline 0 \end{array}$$

105. Die §. 96 gefundene allgemeine Formel, was immer für eine Größe zur verlangten Potenz zu erheben, dient auch, aus was immer für einer Größe die verlangte Wurzel auszuziehen. Nur bey rationalen Größen darf man sie nicht anwenden; denn da diese eine wirkliche in Zahlen auszudrückende Wurzel haben, die man nach den gegebenen Regeln finden kann, würde man durch die Formel diese Wurzel nur beynahe finden Die Formel selbst muß aber in etwas verändert werden; denn weil §. 93. $a^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel von a ist, so darf man in der allgemeinen Formel §. 96 statt des Exponenten m von a, oder statt a^m nur setzen $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ ꝛc. oder $a^{\frac{m}{n}}$ überhaupt, wenn man mit dieser Formel die Quadrat, Cubik, oder überhaupt die Wurzel n ausziehen will. Die Formel erhält hernach folgende Gestalt: $a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ +$

m—

$$\frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ \text{ ꝛc.}$$

Z. B. man soll die Quadratwurzel aus 5, oder $4+1$ ausziehen, so ist

$$a = 4,\ b = 1,\ \frac{b}{a} = Q = \tfrac{1}{4}.\ m = 1,\ n = 2$$

$$a^{\frac{m}{n}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 = A.$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2} \times 2 \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{64} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{1}{2} \times -\tfrac{1}{64} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{512} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8} \times \tfrac{1}{512} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{-5}{16384} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\tfrac{7}{10} \times \tfrac{-5}{16384} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{35}{655360} = F \text{ ꝛc.}$$

Bringt man alles unter einen Nenner, und zieht das Negative vom Positiven ab, so bleibt die Wurzel $2 + \frac{61631}{262144}$, oder wenn man diesen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, 2,23508, woraus das Quadrat 4,9955226064 entsteht. Die Wurzel würde viel genauer, wenn man noch mehrere Theile derselben suchte.

Insgemein lohnet es sich der Mühe nicht, die Quadratwurzeln irrationaler Zahlengrößen auf diese Art zu suchen. Man kömmt mit der gemeinen Art, die Wurzel durch Annäherung zu suchen, viel geschwinder zum Ziele. Auf diese Weise fände man für die Quadratwurzel von 5, sogleich 2,236080. Aber bey Ausziehung der Wurzeln aus irrationalen algebraischen Größen leistet die Formel gute

Dienste. Z. B. Es soll die Quadratwurzel aus $a^2 - x^2$ ausgezogen werden.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{2}} = a = A.$$

$$-x^2 = b$$

$$-\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{a} = Q.$$

$$m = 1$$

$$n = 2$$

$$- - - a = A.$$

$$\frac{m}{n} A Q = \tfrac{1}{2} a \times -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^2}{2a} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = -\tfrac{1}{4} \times -\frac{x^2}{2a} \times -\frac{x^2}{a^2} = \frac{-x^4}{8a^3} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} C Q = -\tfrac{1}{2} \times -\frac{x^4}{8a^3} \times -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^6}{16a^5} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} D Q = -\tfrac{5}{8} \times -\frac{x^6}{16a^5} \times -\frac{x^2}{a^2} = \frac{-5x^8}{128a^7} = E \text{ etc.}$$

Die Quadratwurzel von $a^2 - x^2$ ist also $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ etc.

Sollte man aus $(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel ausziehen, so weis man, daß $(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$. Man dürfte also nur aus dem Nenner durch die Formel die Wurzel suchen, und sie zum Nenner eines Bruches machen, dessen Zähler 1 ist.

Eine andere Methode, jede Wurzel durch Annäherung zu finden wird unten noch vorkommen.

106. Wie

106. Wir übergehen jetzt zur Ausziehung der Cubikwurzel. Sie ist etwas mühsamer, beruhet aber auf ähnlichen Gründen, wie die Ausziehung der Quadratwurzel, und den Beweis kann man leicht finden, wenn man die Verfahrungsart mit jener vergleicht, die wir §. 102 angegeben haben. Man nehme wieder den Cubus der zweygliedrigen Größe $a+b$ zum Muster an, nemlich $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

a) Hieraus sieht man, daß der Cubus eines Binomiums (jede Größe läßt sich aber zu einem Binomium machen) aus den Cubis beyder Glieder, a^3, b^3 bestehe, und aus dem dreyfachen des Quadrates eines Theiles in den andern, $3a^2b$, $3ab^2$.

b) Der Cubus kann nur dreymal so viele Ziffer haben, als die Wurzel hat; denn die Cubi der ersten neun Ziffern sind

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Also hat die höchste dieser einfachen Zahlen nur 3 Ziffern im Cubus. Die kleinste Zahl von zwey Ziffern ist 10, und ihr Cubus 1000, die größte mit zwey Ziffern 99, und ihr Cubus 970299. Folglich hat der höchste Cubus von zwoen Ziffern nur sechs Ziffern. Eben so hat der höchste Cubus einer Zahl von drey Ziffern nur neun Ziffern. Und folglich kann für jede drey Ziffern im Cubus nur eine Ziffer in der Wurzel kommen.

107. **Regeln für die Ausziehung der Cubikwurzel.** Erstens, theile den ganzen Cubus von der Rechten zur Linken in Classen, jede von drey Ziffern ab. Die nächste Classe bey der Linken kann auch nur aus einem, oder zwoen Ziffern bestehen.

Zweytens ist diese Classe selbst ein Cubus, so schreib ihre Wurzel als den ersten Theil der Wurzel zur Seite, a. Ist sie aber kein Cubus, so nimm den nächst kleinern Cubus, und schreib dessen Wurzel zur Seite, in beyden Fällen aber den Cubus selbst unter die erste Classe, und zieh ihn von dieser ab.

Drittens. Es mag ein Rest geblieben seyn, oder nicht, so schreib die folgenden drey Ziffern des Cubus herunter, und dividire mit $3a^2$, um b zu bekommen. Denn von der Formel des Cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist jetzt noch übrig $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Wenn ich also $3a^2b$ mit $3a^2$ dividire, muß b, der zweyte Theil der Wurzel, kommen. Die letzte Ziffer von $3a^2$ kömmt unter die drittletzte des Dividends. Mache sodann $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und subtrahire es.

Viertens. Wenn noch mehrere Classen von drey Ziffern übrig sind, setze ich wieder eine Classe herab, und lasse alle bisher gefundene Theile der Wurzel für a gelten, und dividire wieder mit $3a^2$, und thue alles, was in der dritten Regel gesagt worden. So wird die Operation wiederholt, bis keine Classe mehr herabzusetzen ist. Das Gefundene ist die Cubikwurzel. Durch ein

ein Exempel wird man das Verfahren besser einsehen. Man suche die Cubikwurzel von 86938307.

$$\begin{array}{l|l} 86\dot{9}38\dot{3}07 & 4 \\ \underline{64} & \\ 22938 & \end{array}$$

Der nächst kleinere Cubus als 86 ist 64, und die Wurzel 4. Eigentlich aber ist 4 hier so viel, als 400, weil noch zwo Ziffern nachkommen müssen, da noch zwo Classen von 3 Ziffern übrig sind. Man subtrahirt 64 von 86, bleibt 22. Zu diesen setzt man die nächste Classe herunter, und dividirt mit $3a^2 = 400 \times 400 \times 3 = 480000$, oder nur mit 48, so, daß 8 unter die drittletzte Ziffer des Dividends zu stehen kömmt, nemlich so

$$\begin{array}{r|l} 22938 & 44 \\ 48 & \end{array}$$

4 in 22 geht viermal. Der Quotient 4, oder vielmehr 40 ist b. Nun mache man $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und ziehe die Summe davon vom hierstehenden Dividend ab.

$$\begin{array}{rlr} 3a^2b & = 480000 \times 40 = & 19200000 \\ 3a\ b^2 & = 1200 \times 1600 = & 1920000 \\ b^3 & = 40 \times 40 \times 40 = & \underline{64000} \\ & & 21184000 \end{array}$$

Die drey Nullen, weil sie unter die drey letzten Ziffer zu stehen kämen, die noch nicht herab gesetzt sind, läßt man weg. Also

```
  22938
  21184
  -----
   1754.
```

zu diesem Reste setzt man die noch übrige Classe von 3 Ziffern, und man bekömmt den neuen Dividend

```
1754307 [ 44
```

Der Quotient 44, oder hier 440, weil noch eine Ziffer nachkommen muß, wird jetzt für a angenommen, und $3a^2$ gemacht, um damit dividiren zu können. $3a^2$ $=$ 580800, oder nur 5808.

```
1754307 [ 443      3a²b  = 1742400
 5808   [          3a b² =   11880
1754307               b³ =      27
-------                  -------
      0                  1754307
```

Ich setze jetzt ein anders Exempel im Zusammenhange her. Man verlangt die Cubikwurzel von

```
121287375 [ 495     3a² = 48.   3a²b  = 432
 64       [                     3a b² =  972
--                                 b³ =   729
 57287                                 -----
  48                                   53649
 53649
-----                 3a²   = 7203
 3638375              3a² b = 36015
  7203                3a b² =  3675
 3638375                 b³ =   125
 -------                     -------
       0                     3638375
```

Weil die Nullen, die zu jedem der vorhergehenden Ziffern des Quotienten gehörten, weggelassen werden, so schreibt man die Producte $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

allzeit

allzeit so untereinander, daß jedes in der Ordnung, wie sie hier stehen, um eine Ziffer weiter gegen die Rechte gerückt werde, und so, wie sie übereinander stehen, werden sie addirt.

Man suche noch die Cubikwurzel von 1906624

$$
\begin{array}{l|l}
1906624 & 124 \\
1 & \\
\hline
906 & 3a^2 = 3 \\
3 & \\
728 & \\
\hline
178624 & 3a^2 = 432 \\
432 & \\
178624 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
3a^2b & = 6 \\
3a\,b^2 & = 12 \\
b^3 & = 8 \\
\hline
 & 728 \\
3a^2b & = 1728 \\
 & 576 \\
 & 64 \\
\hline
 & 178624
\end{array}
$$

108. Mit Beyhülfe der allgemeinen Formel eines Cubus zieht man auch die Cubikwurzel aus allen vollkommenen algebraischen Cubis aus. Z. B.

$$
\begin{array}{l}
x^3 + 6x^2d + 12xd^2 + 8d^3 \; \{ \; x + 2d \\
x^3 \\
-x^3 \\
\hline
6x^2d + 12xd^2 + 8d^3 \\
3x^2 \\
6x^2d + 12xd^2 + 8d^3 \\
-6x^2d - 12xd^2 - 8d^3 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
3a^2 & = 3x^2 \\
3a^2b & = 6x^2d \\
3a\,b^2 & = 12xd^2 \\
b^3 & = 8d^3
\end{array}
$$

109. Für alle andere Fälle, wenn die Größe kein vollkommener Cubus, oder irrational ist, sie mag

eine

eine Zahlen- oder Buchstabengröße seyn, wendet man die Formel §. 105 an, und setzt $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$. Man verlangt $\sqrt[3]{11}$, oder $8 + 3$.

$$a = 8$$
$$b = 3$$
$$\frac{a}{b} = Q = \frac{3}{8}$$
$$m = 1$$
$$n = 3$$
$$a^{\frac{m}{n}} = 8^{\frac{1}{3}} = \quad 2 = A.$$
$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4} = B.$$
$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = -\frac{1}{32} = C.$$
$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{9} \times -\frac{1}{32} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{768} = D.$$
$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{2}{3} \times \frac{5}{768} \times \frac{3}{8} = \frac{-5}{3072} = E.$$

Daraus ergiebt sich schon die Wurzel 2.2236 rc. und der Cubus 10,992361080256. Man kann aber die Wurzel noch näher finden, nemlich 2.2239801, wenn man mehrere Glieder sucht.

110. Ich will hier noch eine allgemeine Formel beyfügen, um aus was immer für einer Zahl jede Wurzel recht genau auszuziehen. Sie setzt die Lehre von den Logarithmen zwar voraus, und läßt sich für Anfänger nicht leicht beweisen. Indessen ist es nicht schwer, sie in jedem Falle anzuwenden.

Die

Die Zahl, deren Wurzel man verlangt, sey x, die verlangte Wurzel heiße m. Man suche durch Beyhülfe der Logarithmen diese Wurzel, indem man den Logarithmus von x durch m dividirt, wie an seinem Orte wird bewiesen werden. Die gefundene Wurzel heiße a; so ist die allgemeine Formel, sie noch genauer zu finden:

$$\sqrt[m]{x} = a + \frac{2a(x - a^m)}{(m+1)a^m + (m-1)x}.$$

nemlich für die Quadratwurzel $a + \frac{2a(x-a^2)}{3a^2+x}$

für die Cubikwurzel - - $a + \frac{a(x-a^3)}{2a^3+x}$

Man suche $\sqrt[3]{572}$. Durch die Logarithmen findt man $\sqrt[3]{572} = 8,30103$. Nach der Formel

$$8,30103 + \frac{8.30103\,(572-(8,30103)^3).}{2.(8,30103)^3+572.}$$

$= 8,30103 + 0,0000005005894044$, oder

$\sqrt[3]{572} = 8,3010305005894044.$

Fünf-

Fünftes Hauptstück.

Erster Abschnitt.

Die Rechnung durch Exponenten.

111. Nach §. 93. a können incommensurable Größen auf zweyerley Art ausgedrückt werden. Die Wurzel n der Potenz m von a schreibt man entweder $\sqrt[n]{a^m}$, oder $a^{\frac{m}{n}}$. Bedienet man sich des letztern Ausdruckes, so rechnet man mit Exponenten; bedient man sich des ersten, mit Wurzelgrößen.

Da hier nur von gebrochenen Exponenten die Rede ist — denn wie man Größen mit ganzen Exponenten addiren, subtrahiren, multipliciren, dividiren, zu Potenzen erheben, und die Wurzeln daraus ziehen soll, ist schon gelehret worden — werden wir hauptsächlich nur die Lehre von den gemeinen Brüchen anwenden.

112. Aehnliche Größen werden hier die genannt, welche gleiche Buchstaben, und im Exponenten gleiche Nenner haben. Z. B. $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{3}{4}}$ sind ähnliche, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, oder $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$ sind unähnliche Größen.

113. **Die Exponenten verkleinern.** Man drückt den gebrochenen Exponenten in kleinern Zahlen aus, wenn es angeht, wie man sonst bey gemeinen Brüchen zu thun pflegt $a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{mn}{cn}} = a^{\frac{m}{c}}$

114. Ge-

114. **Gebrochene Exponenten unter einen Nenner bringen.** Man verfährt, wie sonst, wenn man mehrere Brüche unter einen Nenner bringen muß. Z. B. $a^{\frac{2}{3}}, b^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{12}}, b^{\frac{3}{12}}, a^{\frac{m}{n}}, b^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}}, b^{\frac{np}{nq}}$

a) Sind bey dem Exponenten noch Ganze, so verwandelt man diese zuvor in Brüche vom nemlichen Nenner, und bringt dann die gebrochenen Exponenten unter einen Nenner. Z. B. $a^{2\frac{2}{3}}, b^{3\frac{1}{2}} = a^{\frac{8}{3}}, b^{\frac{7}{2}} = a^{\frac{16}{6}}$ $b^{\frac{21}{6}}$

115. **Größen mit gebrochenen Exponenten zu addiren, oder subtrahiren.** Sind sie ähnlich, so werden ihre Coefficienten zusammen addirt, oder voneinander subtrahirt, und zur Summe, oder Differenz die Größen mit ihren Exponenten gesetzt. Sind sie unähnlich, so wird die Addition nur durch dazwischen gesetzte Zeichen angezeigt. Z. B.

Addition. $2b^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}} = 5b^{\frac{1}{2}}$. $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$.

Subtraction.
$$\begin{array}{r} 2a^{\frac{1}{2}} \\ 4a^{\frac{1}{2}} \\ \hline -2a^{\frac{1}{2}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5b^{\frac{2}{3}} \\ -\ 7b^{\frac{2}{3}} \\ \hline 12b^{\frac{2}{3}} \end{array}$$
$a^{\frac{2}{3}}$ davon abgezogen $b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}$.

116. **Größen mit gebrochenen Exponenten miteinander zu multipliciren, oder dividiren.** Hier gilt alles, was wir §. 85, §. 86 von den Exponenten gesagt haben. Die Exponenten ähnlicher Größen werden addirt, oder voneinander subtrahirt. Bey unähnlichen wird die Multiplication und Division nur durch Zeichen angezeigt. Sind zwar die Buchstaben der Größen gleich, die Exponenten aber nicht, so bringt man sie zuvor unter einen Nenner.

Multiplication. $a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} = a$. $b^{\frac{2}{5}} \times b^{\frac{1}{5}} = b^{\frac{3}{5}}$. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}} \times a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$. $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \times a^{\frac{np}{nq}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$. Hingegen $a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}$.

Division. $a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{2}}$. $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}} : a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} : a^{\frac{np}{nq}} = a^{\frac{mq-np}{qn}}$. Hingegen, $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}$.

117. **Größen mit gebrochenen Exponenten zu einer verlangten Dignität zu erheben, oder die verlangte Wurzel daraus zu ziehen.**

Hier

Hier gilt wieder, was wir §. 92. d, §. 93. gesagt haben. Man multiplicire den Exponenten der zu erhebenden Größe durch den Exponenten der verlangten Potenz, oder dividire selben durch den Exponenten der verlangten Wurzel, je nachdem man entweder die Größe zur Potenz erheben, oder die Wurzel davon ausziehen soll.

Zur Potenz erheben. $a^{\frac{2}{3}}$ zur dritten. $a^{\frac{2\times 3}{3}} = a^2$. $b^{\frac{m}{n}}\ c^{\frac{n}{d}}$ zur Potenz $p = b^{\frac{mp}{n}}\ c^{\frac{np}{d}}$.

Die Wurzel ausziehen. $\sqrt{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{3}{4}:2} = a^{\frac{3}{8}}$. $\sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}\ c^{\frac{n}{d}}} = a^{\frac{p:n}{m}}\ c^{\frac{n:n}{d}} = a^{\frac{p}{mn}}\ c^{\frac{1}{d}}$. $\sqrt[\frac{m}{n}]{b^{\frac{p}{q}}} = b^{\frac{p}{q}:\frac{m}{n}} = b^{\frac{p}{q}\times\frac{n}{m}} = b^{\frac{pn}{qm}}$.

Zweyter Abschnitt.

Die Rechnung mit Radicalgrößen.

118. Wer die Rechnung mit den Exponenten versteht, wird bey der Rechnung mit Radicalgrößen keine Schwierigkeit finden. Ja man könnte des Radicalcalculs fast gar entbehren; denn man könnte alle Radicalgrößen durch gebrochene Exponenten ausdrücken. Z. B. $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{a^{-2}} = a^{-1}$ $\sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{9}}$.

Indessen ist doch der Gebrauch der Radicalzeichen sehr häufig, und man kann, wenn man mathematische Schriften liest, nicht fort kommen, wenn man keine Kenntniß davon hat. Folgende Aufgaben werden diesen Calcul ins Licht setzen.

119. **Jede Größe ohne Veränderung ihres Werthes in eine Radicalgröße zu verwandeln.**

Z. B. a. Schreib $a = a^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^2}$ (§. 93) oder $a^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{a^3}$. Soll $a^2 b^3$ eine Radicalgröße vom zweyten, oder dritten Grade werden, schreib $a^{\frac{2 \times 2}{2}} b^{\frac{3 \times 2}{2}} = a^{\frac{4}{2}} b^{\frac{6}{2}} = \sqrt{a^4 b^6}$, $a^{\frac{2 \times 3}{3}} b^{\frac{3 \times 3}{3}} = a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{9}{3}} = \sqrt[3]{a^6 b^9}$. Ueberhaupt, wenn $a^{\frac{p}{m}}$ eine Radicalgröße n werden soll, so schreibt man $\sqrt[n]{a^{\frac{pn}{m}}}$.

120. **Den Exponenten des Radicalzeichens, und der Radicalgröße selbst in kleinern Zahlen auszudrücken.** Dieß ist nur alsdann möglich, wenn beyde Exponenten einen gemeinschaftlichen Theiler haben, dann werden beyde dadurch getheilt. Z. B.

$$\sqrt[6]{a^3 b^9} = a^{\frac{3}{6}} b^{\frac{9}{6}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a b^3},$$

$$\sqrt[3]{a^3 b^3} = a b.$$

121. **Die Radicalgröße hinter dem Radicalzeichen wegzubringen.** Läßt sich der Exponent der

der Radicalgröße durch den Exponenten des Wurzelzeichens ohne Rest dividiren, so setze die Radicalgröße vor dem Wurzelzeichen mit dem Exponenten, der dem herausgekommenen Quotienten gleich ist. Z. B. $\sqrt{a^6 b^4 c^3} = a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{4}{2}} \sqrt{c^3} = a^3 b^2 \sqrt{c^3}$.

Oder, was eben so viel ist, man löset die Radicalgröße in ihre Factoren auf. Ist einer darunter, der eine vollkommne Potenz ist, und den nemlichen Exponenten mit dem Wurzelzeichen hat, so setzt man die Wurzel davon vor das Wurzelzeichen. $\sqrt{a^6 b^4 c^3} = \sqrt{a^4 \times a^2 \times b^2 \times b^2 \times c \times c^2} = a^2 b^2 c \sqrt{a^2 c}$, oder auch $a^2 b^2 \sqrt{a^2 c^3}$. $\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \sqrt{a \times \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a}$. $\sqrt{\frac{a^4}{b}} = a^2 \sqrt{\frac{1}{b}}$.

Sind Zahlen hinter dem Wurzelzeichen, so verfährt man eben so. $a\sqrt{32} = a\sqrt{2 \times 16} = 4a\sqrt{2}$, oder $a\sqrt{4 \times 8} = 2a\sqrt{8}$. $\sqrt{\frac{a}{4}}$ $\frac{1}{2}\sqrt{a}$. $\sqrt[3]{8b} = 2\sqrt[3]{b}$. $\sqrt[3]{128 a^4} = \sqrt[3]{64 \times 2 \times a^3 \times a} = 4a\sqrt[3]{2a}$.

a) Durch ein umgekehrtes Verfahren kann man die vor dem Wurzelzeichen stehenden Coefficienten hinter selbiges bringen. $4a^2\sqrt{5b} = \sqrt{16 \times 5a^4 b} = \sqrt{80a^4 b}$. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}a}$. $\overline{a-b}\sqrt{c} = \sqrt{a^2 c - 2abc + b^2 c}$.

122. **Zwoen Radicalgrößen den nemlichen Wurzelexponenten zu geben.** Man verwandle die Radicalgrößen in Größen mit gebrochenen Exponenten, bringe darauf diese unter einen Nenner, und mache sie wieder zu Radicalgrößen. Zum Beyspiele, es sollen $\sqrt{a^3}$, und $\sqrt[3]{b^4}$ den nemlichen Wurzelexponenten bekommen. $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{b^4} = b^{\frac{4}{3}}$, $a^{\frac{9}{6}}$, $b^{\frac{8}{6}}$ $= \sqrt[6]{a^9}$, $\sqrt[6]{b^8}$.

$$3\sqrt[n]{\frac{b}{c}} + 2a\sqrt[m]{\frac{a}{d^2}} = 3\,\frac{b^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} + 2a \times \frac{a^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{2}{m}}} =$$

$$\frac{3\,b^{\frac{m}{mn}}}{c^{\frac{m}{mn}}} + 2a \times \frac{a^{\frac{n}{mn}}}{d^{\frac{2n}{mn}}} = 3\sqrt[mn]{\frac{b^m}{c^m}} + 2a\sqrt[mn]{\frac{a^n}{d^{2n}}}.$$

a) Haben die Radicalgrößen ein gleiches Wurzelzeichen, so ist diejenige größer, welche eine größere Quantität hinter dem Wurzelzeichen hat. $\sqrt{9} > \sqrt{8}$.

123. **Radicalgrößen zusammen addiren, oder voneinander subtrahiren.** Sind sie ähnlich, das heißt, haben sie den nemlichen Wurzelexponenten, und das nemliche hinter dem Wurzelzeichen, so addirt, oder subtrahirt man nur ihre Coefficienten, und setzt das Wurzelzeichen mit der Radikalgröße an die Summe, oder Differenz. Bey unähnlichen Radicalgrößen wird die Operation nur durch +, oder — angezeigt.

Hier

Hier kann man sich öfters der §. 121 angezeigten Methode bedienen, um die Radicalgrößen einander ähnlich zu machen.

Addition. $2\sqrt{a^3} + 5\sqrt{a^3} = 7\sqrt{a^3}$.

$6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$.

$4\sqrt{6} + 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{4 \times 6} = 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$

Subtraction. $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = \sqrt{a}$.

$3\sqrt{a} - 2\sqrt{b} = 3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}$

$3\sqrt{50} - \sqrt{32} = 3\sqrt{25 \times 2} - \sqrt{16 \times 2} = 15\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$.

124. **Radicalgrößen miteinander multipliciren.** Sie müssen den nemlichen Wurzelexponenten haben, oder man muß ihnen selben geben. Dann multiplicirt man sowohl ihre Coefficienten miteinander, als die Radicalgrößen.

$2\sqrt{b} \times 3\sqrt{c} = 6\sqrt{bc}$. $2\sqrt{ad} \times \sqrt[3]{b^2 c^2} = 2 \times a^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} = 2 \times a^{\frac{3}{6}} d^{\frac{3}{6}} \times b^{\frac{4}{6}} c^{\frac{4}{6}} = 2\sqrt[6]{a^3 b^3} \times \sqrt[6]{b^4 c^4} = 2\sqrt[6]{a^3 d^3 b^4 c^4}$.

$3\sqrt{8} \times 5\sqrt{2} = 15\sqrt{16}$. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$.

125. **Radicalgrößen miteinander dividiren.** Sie müssen wieder den nemlichen Wurzelexpo-

nenten haben. Dann dividirt man Coefficienten durch Coefficienten, Radicalgrößen durch Radicalgrößen.

$6\sqrt{4} : 3\sqrt{2} = \frac{6}{3}\sqrt{\frac{4}{2}} = 2\sqrt{2}$. $4\sqrt{6} : 2\sqrt[3]{27} = 4\times 6^{\frac{1}{2}} : 2\times 27^{\frac{1}{3}} = 4\times 6^{\frac{3}{6}} : 2\times 27^{\frac{2}{6}} = 4\sqrt[6]{6^3} : 2\sqrt[6]{27^2} = 4\sqrt[6]{216} : 2\sqrt[6]{459} = 2\sqrt[6]{\frac{216}{459}} = 2\sqrt[6]{\frac{8}{17}} = \sqrt[6]{\frac{262144}{17}}$.

$\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{c}{d}} : \frac{e}{f}\sqrt[3]{\frac{g}{h}} = \frac{af}{be}\sqrt{\frac{ch}{dg}}$. $9\sqrt[3]{b} : 3\sqrt{\frac{b}{c}} = 9\times b^{\frac{1}{3}} : 3\times\frac{b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} = 9\times b^{\frac{2}{6}} : 3\times\frac{b^{\frac{3}{6}}}{c^{\frac{3}{6}}} = 9\sqrt[6]{b^2} : 3\sqrt[6]{\frac{b^3}{c^3}} = \frac{9}{3}\sqrt[6]{\frac{b^2c^3}{b^3}} = 3\sqrt[6]{\frac{c^3}{b}}$.

126. **Eine Radicalgröße zur verlangten Potenz zu erheben.** Man erhebe sowohl den Coefficienten, als die Radicalgröße zur verlangten Potenz.

$(2\sqrt{6})^2 = 4\sqrt{36} = 4\times 6 = 24$. $(a\sqrt[4]{b})^2 = a^2\sqrt[4]{b^2} = a^2 b^{\frac{1}{2}}. = a^2\sqrt{b}$. $(a\sqrt[3]{ab})^2 = a^2\sqrt[3]{a^2b^2}$.

127. **Aus einer Radicalgröße die verlangte Wurzel ziehen.** Wenn ein Coefficient da ist, so bringe man ihn (nach §. 121. a) hinter das Wurzelzeichen, und multiplicire den Exponenten des Radicalzeichens

zeichens mit dem Exponenten der verlangten Wurzel. Z. B. $\sqrt{}$ von $a\sqrt{b} = \sqrt{}$ von $\sqrt{a^2 b} = \sqrt[4]{a^2 b}$.

$$\sqrt{4\sqrt[3]{c}} = \sqrt{\sqrt[3]{64c}} = \sqrt[6]{64c}.$$

a) Also kann man auch solche Größen, wie $\sqrt{\sqrt{ab}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$, oder $\sqrt[3]{\sqrt[5]{cd}}$ kürzer ausdrücken, wenn man die Exponenten der Wurzelzeichen miteinander multiplicirt, und das Product in das Wurzelzeichen schreibt. Dann wird die erste $\sqrt[4]{ab}$, die zweyte $\sqrt[8]{a}$, die dritte $\sqrt[15]{cd}$.

Zugabe von unmöglichen Wurzeln.

128. $\sqrt{-a}$ ist eine unmögliche Wurzel (§. 99). Also ist $-a$ das eingebildete Quadrat davon. Ist $-a$ das Quadrat, so ist $+\sqrt{-a} \times + \sqrt{-a} = -a$, und folglich gelten bey imaginären Wurzeln die Regeln: **Eine imaginäre Wurzel mit einer andern imaginären multiplicirt giebt ein negatives Product. Und umgekehrt: Wenn die Zeichen vor dem Wurzelzeichen entgegen gesetzt sind, ist das Product positiv. Die nemlichen müssen auch bey der Division gelten.**

I. $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +a$

II. $-b\sqrt{-a} \times c\sqrt{-a} = -bc \times -a = +abc$

III. $-b\sqrt{-a} \times -c\sqrt{-a} = +bc \times -a = -abc$

$$\frac{a}{\sqrt{-a}} = + \frac{\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}}{+\sqrt{-a}} \text{(I)} = -\sqrt{-a}$$

a) Man sieht also, daß, wie §. 99. b) gesagt worden, solche imaginäre Potenzen zwar als Potenzen etwas unmögliches sind, aber doch an sich etwas wirkliches, und daß aus der Multiplication, oder Division derselben wirkliche Größen herauskommen. Folglich darf man sie nichts weniger, als verachten. Bey Auflösung der Aufgaben von höhern Graden, als dem ersten, verfällt man gar oft auf eingebildete Wurzeln, welche allein die Auflösung geben. Ja diese Wurzeln verschwinden gar, und erscheinen in der Aufgabe nicht. Wir werden gleich bey Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade Beyspiele sehen. Zum Beyspiele: Man findt, die unbekannte Größe sey $a \pm \sqrt{-1}$. Multiplicire ich nun

$$\begin{array}{l} a + \sqrt{-1} \\ a - \sqrt{-1} \\ \hline a^2 + a\sqrt{-1} \\ \quad - a\sqrt{-1} - 1 + 1 \\ \hline a^2 - 1 \end{array}$$

so habe ich keine imaginäre Wurzel mehr im Product. Doch dieß läßt sich jetzt noch nicht verstehen.

Sechs-

Sechstes Hauptstück.

Anwendung der Buchstabenrechenkunst auf die Gleichungen, oder Analysis, die Auflösungskunst.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

129. Eine Gleichung ist der Ausdruck der nemlichen Größe auf zweyerley Art. So läßt sich z. B. der Werth von 6 verschieden ausdrücken, als $6 = 5 + 1$, oder $4 + 2$, oder $3 + 3$. Ja alle folgende Ausdrücke gelten eben so viel, $7 - 1$, $8 - 2$, $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\sqrt{36}$, oder 2×3. Ja sogar $5\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, $4\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4}$. Mit einem Worte, es lassen sich unendlich viele Ausdrücke denken, deren Werth 6 ist.

Wenn man nun was immer für zween solche Ausdrücke wählt, und sie einander gleich setzet, so hat man eine Gleichung. Z. B.

I.	$5 + 1 = 4 + 2$
II.	$5 + 1 = 7 - 1$
III.	$8 - 2 = 3 \times 2$
IIII.	$9 - 3 = \frac{12}{2}$
V.	$3 + 3 = \sqrt{36}$

Wir wollen nun in jeder dieser Gleichungen eine Ziffer weglassen, und an ihre Stelle * setzen, so würden diese Gleichungen so aussehen:

Ver:

I. $* + 1 = 4 + 2$
II. $5 + 1 = * - 1$
III. $8 - 2 = * \times 2$
IIII. $9 - 3 = \frac{*}{2}$
V. $3 + 3 = \sqrt{*}$

Vergleicht man jede dieser zweyten Gleichungen mit den correspondirenden ersten, so sieht man gleich, daß das Sternchen allzeit einen bestimmten Werth habe, und daß nur eine bestimmte Zahl an den Platz desselben gesetzt werden könne. Jede andere gäbe nicht mehr mit der dabeystehenden den Werth 6. Z. B. in der Gleichung I. kann an die Stelle von * nur 5 kommen.

130. Die Auflösungskunst besteht darinn, daß man in einer Gleichung, wo eine oder mehrere Größen unbekannt sind, wie hier die mit * bezeichneten, jene Größen finde, welche an die Stelle * gesetzt mit den dabeystehenden bekannten Größen gerade den Werth geben, welchen die auf der andern Seite des Zeichens = stehenden bekannten Größen ausdrücken. Z. B. in der I. Gleichung $* + 1 = 4 + 2$ muß durch die Auflösungskunst gefunden werden, daß an die Stelle * 5 gehöre, damit es mit 1, 6 ausmache, wie $4 + 2$, das auf der andern Seite des Zeichens = steht.

Die Mathemathiker schreiben an die Stelle * willkührlich einen der letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, um dadurch jede unbekannte Größe

zu

zu bezeichnen, so wie sie die bekannten mit den ersten Buchstaben des Alphabets ausdrücken. So würde die erste Gleichung von ihnen ungefähr so geschrieben werden $x + a = b + c$.

131. Die ganze Rechenkunst lehret nur, aus bekannten Größen unbekannte zu finden. Z. B. Aus den bekannten Größen 6, 2, ihre unbekannte Summe 8 durch die Addition, ihre Differenz 4 durch die Subtraction, ihr Product 12 durch die Multiplication, und ihren unbekannten Quotienten 3 durch die Division. In so weit kömmt also die Auflösungskunst mit der gemeinen Arithmetik übereins, daß beyde aus bekannten Größen unbekannte suchen. Aber erstere hat dieses eigen, daß sie unbekannte Größen aus den bekannten **durch Beyhülfe der Gleichungen** sucht. Also ist

Die Auflösungskunst, Analysis, eine Wissenschaft, unbekannte Größen aus den bekannten durch Gleichungen zu finden.

a) So oft also eine Aufgabe zur Auflösung mittels der Buchstabenrechnung vorgelegt wird, muß man sie in eine Gleichung verwandeln. Wie man dabey zu verfahren habe, wird weiter unten gezeigt werden. Z. B. Wenn einer sagte: **Ich denke eine Zahl. Setze ich noch 2 hinzu, so kömmt die Summe 8.** Was ist dieß nun für eine Zahl? Diese Aufgabe wird so angeschrieben: $x + 2 = 8$. Meine Verrichtung ist nur, wie ich aus den gegebenen Zahlen 2 und 8 den Werth der unbekannten Größe x finden kann durch Beyhülfe dieser Gleichung. Wir müssen

müssen also vor allem lernen, wie man die Gleichungen auflösen, oder den Werth der unbekannten Größen finden kann.

132. **Eine Gleichung auflösen heißt finden, was die unbekannten Größen gelten, die darinn vorkommen.**

a) Ich weis, was eine unbekannte Größe gilt, wenn sie auf einer Seite der Gleichung allein zu stehen kommt, und auf der andern lauter bekannten Größen sind. Z. B. Wenn die Gleichung so stände, $x = 6$, oder $x = 5 - 2$, oder $x = \frac{36}{4}$, so wäre mir ja bekannt, x gälte im ersten Falle 6, im zweyten 3, im dritten 9.

b) Die ganze Auflösungskunst läuft also dahinaus, die Gleichung so zu verändern, daß die unbekannte Größe allein auf einer Seite stehen bleibe, und auf der andern lauter bekannte Größen vorkommen.

c) Zu der unbekannten Größe können nur einige bekannte addirt, oder von ihr subtrahirt seyn, sie kann mit einer bekannten multiplicirt, oder dividirt seyn. Um sie also allein auf einer Seite der Gleichung zu bekommen, muß man das, was zu ihr addirt, oder von ihr subtrahirt ist, oder das, womit sie multiplicirt, oder dividirt ist, von ihr hinwegbringen.

Wir wollen also die Regeln aufsuchen, nach welchen eine Gleichung behandelt werden muß, um es dahin zu bringen, damit die unbekannte Größe allein auf einer Seite stehen bleibe.

Diese Regeln beruhen auf folgenden theils für sich selbst klaren, theils schon erwiesenen Grundsätzen.

I. In

I. In jeder Gleichung gelten die Glieder einer Seite zusammen genommen gerade so viel, als die Glieder auf der andern Seite (§. 129.). Oder wenn alle Glieder auf der Linken $= a$, und alle Glieder auf der Rechten $= b$, so ist $a = b$.

II. Wenn ich zu gleichen etwas Gleiches hinzuthue, oder von gleichen etwas Gleiches hinwegnehme, sind die entstehenden Summen, oder Differenzen auch gleich (§. 10.).

III. Wenn ich gleiche Größen mit gleichen multiplicire, oder dividire, sind die Producte, oder Quotienten daraus auch gleich, oder was eines ist, die zwey- drey- vierfache ꝛc. der nemlichen Größen, so wie die Halben- Dritt- Viertheile ꝛc. der nemlichen Ganzen sind gleich.

Also, weil $a = b$, so ist auch $a + c = b + c$, $a - c = b - c$, $a \times c = b \times c$, und $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

133. Wir wollen zur Erfindung der Regeln besondere Gleichungen vornehmen, weil sich Anfänger in die Buchstaben nicht so leicht zu finden wissen. Indessen setze ich neben hin auch allgemeine Gleichungen, woraus man zeigen kann, daß die gefundenen Regeln allgemein gelten.

I.	$x + 2 = 6$	I.	$x + a = b$
II.	$x - 2 = 6$	II.	$x - a = b$
III.	$2x = 6$	III.	$ax = b$
IIII.	$\frac{x}{2} = 6$	IIII.	$\frac{x}{2} = b$

a) Neh-

a) Nehmen wir zuerst die Gleichung $x+2=6$. Wenn 2 von x weg wäre, so hätte ich dieses allein, wie ich es zur Auflösung haben sollte (§. 132.). Nun ist aber $+2$ zu x addirt. Ich darf es also nur subtrahiren; denn $x+2-2=x$. Aber auf diese Art würden die beyden Seiten der Gleichung einander ungleich, wenn ich auf einer Seite 2 wegnähme, und auf der andern nicht. Ich muß also 2 auch auf der andern Seite wegnehmen; denn so bleibt die Gleichheit (§. 132. II.). Also geschieht die Veränderung der ersten Gleichung so:

$$x+2=6$$
$$x+2-2=6-2$$
$$x=6-2$$
$$x=4.$$

Sehe ich nun zurück auf das, was ich gethan habe, so bemerke ich, daß die bekannte Größe 2, die zur unbekannten, x, addirt war, auf die andere Seite mit veränderten Zeichen hinüber gekommen, und so die unbekannte Größe von der bekannten befreyet worden ist. Eben so verfahre ich bey der Gleichung

$$x+a=b$$
$$x+a-a=b-a$$
$$x=b-a.$$

Hieraus ziehe ich die allgemeine Regel: **Was zur unbekannten Größe addirt ist, wird mit veränderten Zeichen auf die andere Seite gesezt, oder auf der andern Seite subtrahirt, um die unbekannte Größe allein zu bekommen.**

Um

Um meinen Zuhörern diese Verfahrungsart recht zu versinnlichen, pflege ich ein Stück Geld, z. B. einen Zwölfer in Papier einzuwickeln, und x darauf zu schreiben. Zu diesem lege ich noch andere Geldsorten, Sechser, Groschen, Kreuzer. Auf die andere Seite lege ich eben so viel Geld in den nemlichen Sorten, aber hier wird der Zwölfer nicht eingewickelt, und zwischen beyde Summen mache ich das Zeichen $=$. Die Aufgabe liegt z. B. so auf dem Tische:

$$x + 6 + 3 + 1 = 12 + 6 + 3 + 1.$$

Ich sage ihnen hierauf, auf einer Seite liegt so viel Geld, als auf der andern. Sie sollten nun finden, wieviel das eingewickelte Stück gelte. Wenn sie nun nach und nach ein gleiches Stück wegnehmen, bleibt zuletzt das eingewickelte Stück $= 12$.

b) Die zweyte Gleichung ist $x - 2 = 6$. Hier ist 2 von der unbekannten Größe subtrahirt. Hätte ich -2 weg, so stände die unbekannte Größe allein da. Wenn ich 2 dazu addirte, so würde -2 verschwinden; denn $x - 2 + 2 = x$. Das darf ich aber thun, wenn ich nur auf der andern Seite, um die Gleichheit beyzubehalten auch 2 addire. Die zweyte Gleichung wird also verändert:

$$x - 2 = 6$$
$$x - 2 + 2 = 6 + 2$$
$$x = 6 + 2$$
$$x = 8.$$

Sehe ich zurück, wie ich verfahren bin, um x allein auf einer Seite zu bekommen, so bemerke ich, daß die Größe 2, die von der unbekannten subtrahirt

war, mit veränderten Zeichen auf die andere Seite hinüber gekommen, und so die unbekannte Größe von der bekannten befreyt worden ist. Und da dieses bey der Gleichung $x - a = b$ eben so wohl gilt, habe ich die zweyte allgemeine Regel: **Was von der unbekannten Größe subtrahirt ist, wird mit veränderten Zeichen auf die andere Seite gesetzt, oder auf der andern Seite addirt, um die unbekannte Größe allein zu bekommen.**

Kürze halber kann man beyde Regeln in eine zusammenfassen: **Die bekannten Größen, welche mit der unbekannten Größe eine Summe ausmachen, wegzubringen, lasse man sie da weg, und setze sie mit veränderten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung.**

c) Die dritte Gleichung ist $2x = 6$, oder $2 \times x = 6$. Hier soll 2, das weder zu x addirt, noch davon subtrahirt, sondern womit x multiplicirt ist, weggebracht werden. Dann stünde wieder x allein auf einer Seite. Wenn ich $2x$ mit 2 dividirte, hätte ich x allein; denn $\frac{2x}{2} = x$. Das darf ich aber thun, wenn ich nur zur Erhaltung der Gleichheit auch die andere Seite der Gleichung mit 2 dividire (132. III.). Die dritte Gleichung wird also so verändert:

$$2x = 6$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$
$$x = 3.$$

Gehe

Sehe ich wieder auf die gebrauchte Verfahrungsart zurücke, so bemerke ich, daß die bekannte Größe 2, womit die unbekannte x multiplicirt war, weggebracht wurde, indem ich die zwo Seiten der Gleichung damit dividirte. Und da dieses auch bey der Gleichung $ax = b$ gilt, fließt daraus die dritte Regel: **Mit was die unbekannte Größe multiplicirt ist, damit werden beyde Seiten der Gleichung dividirt.** Alsdann bekomme ich die unbekannte Größe allein, und auf der andern Seite lauter bekannte.

d) Die letzte Gleichung war $\frac{x}{2} = 6$. Hier ist die unbekannte Größe mit 2 dividirt. Um sie allein zu erhalten, dürfte ich sie nur mit 2 multipliciren; denn $\frac{2 \times x}{2} = x$. Das darf ich aber thun, wenn ich nur beyde Seiten der Gleichung mit 2 multiplicire (§. 132. III.). Die vierte Gleichung würde also so verwandelt:

$$\frac{x}{2} = 6$$

$$\frac{2x}{2} = 2 \times 6$$

$$x = 12$$

Sehe ich wieder auf die Verfahrungsart zurück, so finde ich, daß die bekannte Größe 2, womit die unbekannte x dividirt war, von ihr weggebracht, und diese allein erhalten wurde, indem beyderseits mit der nemlichen bekannten multiplicirt wurde. Und da dieses auch bey

der Gleichung $\frac{x}{a} = b$ gilt, kömmt die vierte Regel: **Mit was die unbekannte Größe auf einer Seite dividirt ist, damit werden beyde Seiten multiplicirt.** Alsdann erhalte ich die unbekannte Größe allein, und auf der andern lauter bekannte.

134. Mit Beyhülfe dieser vier Regeln kann man eine Menge Gleichungen auflösen, oder finden, was die unbekannte Größe darinn gilt. Doch braucht man meistentheils mehrere davon zugleich. Es giebt aber noch besondere Regeln, die nothwendig sind, wenn man Gleichungen auflösen will, die entweder mehrere Unbekannte enthalten, oder in denen die Unbekannte auf eine höhere, als die erste Potenz, erhoben ist. Davon wird das hier Nothwendige an seinem Orte vorkommen.

a) Zur Beyhülfe des Gedächtnisses kann man ersagte vier Regeln in diese einzige zusammenfassen: **Die unbekannte Größen von allen bekannten zu befreyen, oder allein auf eine Seite zu bekommen, bringt man sie durch eine Operation hinweg, welche der entgegengesetzt ist, durch die sie verbunden worden.**

b) Daß die Addition der Subtraction, die Multiplication der Division, und umgekehrt, entgegengesetzt sey, ist klar.

135. Oft kömmt die unbekannte Größe mehrmals in einer Gleichung vor. Man muß also alle Glieder, worinn sie ist, auf einer Seite haben, damit

auf

auf der andern lauter bekannte seyn. Dieß geht leicht an, indem man sie mit veränderten Zeichen in eine Seite zusammen bringt (§. 133. b). Z. B. $3x+7 = 2x+15$. oder $3x+7-2x = 15$. oder $x+7 = 15$, und endlich $x = 15-7$, oder $x = 8$.

a) Ueberhaupt darf man jedes Glied einer Gleichung von einer Seite auf die andere mit veränderten Zeichen setzen.

b) Folglich auch alle Zeichen in beyden Seiten der Gleichung ändern; denn das ist eben so viel, als wenn ich alle Glieder der rechten auf die linke, und der linken auf die rechte Seite setze.

c) Da in den meisten Aufgaben die unbekannte Größe nicht zu gebrauchen wäre, wenn sie negativ würde, darf man, wo dieses eintrifft, nachdem alle unbekannte Größen auf einer Seite sind, nur die Zeichen aller Glieder der Gleichung ändern, um die unbekannte Größe positiv zu erhalten.

$6x - 5 = 20$	$\frac{3x}{2} = 60$	$\frac{x+6}{2} = 90$
$6x = 20 + 5$	$3x = 60 \times 2$	$x+6 = 90 \times 2$
$x = \frac{25}{6}$	$x = \frac{120}{3}$	$x = 180 - 6$
$x = 4\frac{1}{6}$	$x = 40$	$x = 174$

$$\frac{124-y}{2} = 30$$

$124 - y = 60$

$124 = 60 + y$. damit y positiv werde.

$124 - 60 = y$

$64 = y$.

$$\frac{164 - x}{2} = 800$$

$164 - x = 1600$

$-x = 1600 - 164$

$x = -1600 + 164$, nach Veränderung aller Zeichen.

$x = -1436$

$\frac{3y}{2} - 4 = 18.$

$3y - 4 \times 2 = 18 \times 2$

$3y - 8 = 36$

$3y = 36 + 8$

$3y = 44$

$y = \frac{44}{3}$

$y = 14\frac{2}{3}$

$\frac{4x + 2}{3} = 18$

$4x + 2 = 54$

$4x = 54 - 2$

$4x = 52$

$x = \frac{52}{4}$

$x = 13$

$$4x + \frac{2x}{6} - 3 = x + \frac{6x}{9} + 5$$

$$6 \times 4x + 2x - 3 \times 6 = 6x + \frac{6 \times 6x}{9} + 5 \times 6$$

$$24x + 2x - 18 = 6x + \frac{36x}{9} + 30$$

$24x + 2x - 18 = 6x + 4x + 30$

$26x - 10x = 30 + 18$

$16x = 48$

$x = 3$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{x}{12} - \frac{x}{16} = 130 - x$$

$$\frac{24x - 16x - 12x - 6x - 4x - 3x}{48} = 130 - x$$

$- 17x$

$$\frac{-17x}{48} = 130 - x$$
$$-17x = 130 \times 48 - 48x$$
$$48x - 17x = 6240$$
$$31x = 6240$$
$$x = \tfrac{6240}{31} = 201\tfrac{9}{31}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 4 = 25 - x$$
$$\frac{3x - 2x}{6} + 4 = 25 - x$$
$$3x - 2x + 24 = 150 - 6x$$
$$x + 24 = 150 - 6x$$
$$x + 6x + 24 = 150$$
$$7x = 150 - 24$$
$$7x = 126$$
$$x = \tfrac{126}{7} = 18$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 10$$
$$\frac{2x + 3x}{6} = 10$$
$$\frac{5x}{6} = 10$$
$$5x = 60$$
$$x = \tfrac{60}{5} = 12.$$

$$\frac{x}{a} + bc = 8 - 3d$$
$$x + abc = 8a - 3ad$$
$$x = 8a - 3ad - abc.$$

136. Wir könnten itzt gleich zur Auflösung der Aufgabe übergehen; nur muß ich zuvor noch eine Bedenklichkeit heben, die Anfängern nur gar zu oft aufstößt, und die ich schon (§. 78. a) berührt habe. Wozu braucht man dann die Buchstaben? Es läßt sich ja alles mit Ziffern rechnen, sagen sie. Die sogenannten Rechenmeister unter dem Pöbel, die gar keinen Begriff von Algebra haben, weil sie einige Räthsel mit Ziffern, etwa durch die regula falsi auf-

lösen können, die ein anderer mit Buchstaben ausrechnet, spotten wohl gar über die Algebra, als wäre sie etwas sehr überflüßiges. Man muß es diesen guten Handwerksrechnern verzeihen, weil sie es nicht besser verstehen, und nicht mit ihnen streiten. Ein einziges Beyspiel soll das Gegentheil dieser albernen Meynung beweisen. Von einem andertwärtigen Gebrauche der Algebra kann ich jeßt für Anfänger noch nichts sagen.

Ein Vater ist jetzt 46 Jahre alt, und sein Sohn 12. Wie lange muß der Vater noch leben, bis er noch so alt seyn wird, als sein Sohn.

Nach der Auflösung finde ich, daß er in 22 Jahren noch so alt seyn werde; denn $46 + 22 = 68$, und $12 + 22 = 34$, und $\frac{68}{2} = 34$. Es bekümmert uns jeßt noch gar nichts, wie diese Anzahl von Jahren gefunden worden, wozu hernach Anweisung wird gegeben werden. Genug, wenn man die Anzahl der Jahre, die sie noch beyde miteinander fortleben müssen, x nennet, so findet man $x = 46 - 24 = 22$.

Wir sehen hier, daß der Algebrist, wenn er gleich die unbekannte Zahl nicht weis, doch sie durch einen Buchstaben x ansetzen, und dann fortrechnen kann, als wenn sie ihm bekannt wäre, bis er zuletzt den Werth von ihr findet. Der gemeine Rechner kann dieses Exempel nicht einmal ansetzen, und hat auch

keine

keine gewiße Regel es aufzulösen. Höchstens wird er die Zahl 22 nur durch Versuche herausbringen, indem er immer zu den Jahren des Vaters, und des Sohnes 1 addirt, bis jene Zahl noch so groß wird, als diese, welches erst nach 22 Versuchen geschehen wird. Das heißt man aber nicht rechnen, oder nach einer Regel verfahren, sondern an den Fingern abzählen, wie es die Bauern machen.

Wäre das Alter des Vaters und Sohnes in andern Zahlen gegeben, so müßte der gemeine Rechner seine mechanische Arbeit mit Abzählen bey jedem Exempel wieder auf ein neues vornehmen. Der Algebrist nicht. Er drückt das Alter des Vaters, und des Sohnes, es mag groß oder klein seyn, durch zween Buchstaben, z. B. durch a und b aus, und findt nach der Auflösung $x = a - 2b$, oder wenn er diese allgemeine algebraische Formel mit Worten ausdrückt, entdeckt er folgende allgemeine Regel: **Man subtrahire vom Alter des Vaters das doppelte Alter des Sohns. Der Rest zeigt die Jahre an, nach welchen der Vater noch so alt seyn wird, als der Sohn.** Und das trifft zu, was man immer für ein Alter für Vater und Sohn annimmt.

Giebt man dem gemeinen Rechner das Alter des Vaters, und des Sohnes nicht in Ziffern, so kann er dieß Exempel nicht einmal ansetzen, vielweniger eine allgemeine Regel finden, wie alle ähnliche Aufgaben müssen aufgelößt werden. Aber dem Algebristen darf

man darf nur sagen: **Man giebt das Alter des Vaters, a, und das Alter des Sohnes b. Nach wie vielen Jahren wird der Vater noch so alt seyn, als der Sohn?** Und er kann ansetzen, ausrechnen, und eine Regel finden, nach der alle Aufgaben dieser Art allzeit können aufgelöst werden.

Ja, was noch mehr ist, diese einzige Regel $x = a - 2b$ enthält auch die Auflösung schon, wenn der Vater schon **noch so alt gewesen ist**, als der Sohn, oder wenn er es **wirklich** ist. Ist der Vater 50, der Sohn 26 Jahre alt, so ist $a - 2b = 50 - 52 = -2$. So oft x einen negativen Werth hat, wie hier, muß man es in einem entgegengesetzten Verstande der Aufgabe nehmen. Nun fragt man: In wie viel Jahre wird der Vater noch so alt **werden**, als der Sohn? Der Werth von x, nemlich -2 zeigt an, er sey vor 2 Jahren schon noch so alt **gewesen**. In der That war der Vater vor 2 Jahren alt 48 Jahre, und der Sohn 24. Jenes aber ist das doppelte von diesem.

Ist das Alter des Vaters 48, des Sohnes 24 Jahre, so wird aus $x = a - 2b$, $48 - 48 = 0$. d. i. der Vater darf kein Jahr mehr leben, bis er noch so alt wird, als der Sohn, sondern er ist es wirklich.

Noch nicht genug. Die Algebra kann diese Aufgabe noch allgemeiner auflösen. Man kann auch fragen: **Wenn wird der Vater drey, vier, fünf-**

tau-

tausend, oder hundertmal so alt, als der Sohn? Der Algebrist setzt hier nur für drey — vier — fünf — hundert, oder tausend ꝛc. einen Buchstaben, z. B. c. und findt die allgemeine Regel $x = \frac{a - cb}{c - 1}$, das heißt, um die Anzahl der Jahre zu finden, bis der Vater drey — vier — oder überhaupt c mal so alt wird als der Sohn, ziehe man vom Alter des Vaters das Alter des Sohnes mit c multiplicirt ab, und dividire den Rest mit $c - 1$. Z. B. $a = 40$, $b = 10$. Wann wird der Vater dreymal (c) so alt seyn, als der Sohn. $\frac{40 - 30}{2} = \frac{10}{2} = 5$. In fünf Jahren ist der Vater alt 45, und der Sohn 15 Jahre. Es ist aber $15 \times 3 = 45$.

Man kann endlich diese Aufgabe noch allgemeiner machen. Es soll eine Zahl gefunden werden, welche, wenn sie zu zwoen andern gegebenen addirt wird, die größere derselben zur zwey, drey, vier, oder überhaupt zur verlangten vielfachen der kleinern macht. Diese Zahl, oder x wird gefunden $\frac{a - bc}{c - 1}$, wie oben. Z. B. Es sey die größere Zahl 24, die kleinere 3. Welche Zahl muß man zu diesen zwoen addiren, daß jene das Hundertfache von dieser werde. $\frac{24 - 300}{99} = -\frac{276}{27}$. Also ist die größere Zahl $24 - \frac{276}{99} = \frac{2100}{99}$, und die kleinere $3 - \frac{276}{99} = \frac{21}{99}$. Es ist aber $\frac{2100}{99} : \frac{21}{99}$, oder $\frac{2100}{99} \times \frac{99}{21} = 100$. Folglich ist die größere

Zahl

Zahl hundertmal so groß geworden, als die kleinere.

Man sieht also die großen Vortheile, welche die Algebra vor der gemeinen Arithmetik gewährt. Man kann damit Aufgaben auflösen, ehe bestimmte, und bekannte Zahlen angegeben werden. Man findt dadurch Regeln, alle Aufgaben einer Art auf einmal aufzulösen, daß man hernach nur die gegebenen Zahlen an die Stelle der Buchstaben setzen darf. Man findt Regeln, die allerallgemeinsten Aufgaben aufzulösen, die von den wenigsten Bedingnissen abhängen. Andere Vortheile wird man kennen lernen, wenn man tiefer in die Mathematik eindringt.

Zweyter Abschnitt.

Auflösung der Aufgaben vom ersten Grade, mit einer unbekannten Größe.

137. Aufgaben vom ersten Grade nennet man die, welche die unbekannten Größen nur in der ersten Potenz erhalten. Z. B. $\frac{x}{2} + 5 = 16$. Hingegen $x^2 - 2x = 6$ wäre eine Aufgabe vom zweyten Grade.

138. Regeln zur Auflösung solcher Aufgaben.

I. Man schreibe, bis man mehr Uebung bekömmt, die Aufgabe von Worte zu Worte nieder, damit man sie öfters überdenken könne. Dann gebe man Achtung, welche

welche Größen eigentlich bekannt, und welche unbekannt sind.

a) Oft scheint es beym ersten Anblicke, eine Aufgabe enthalte mehrere unbekannte Größen, da sie doch nur eine einzige hat, aus welcher alle andere von sich selbst bestimmt werden, und herfließen. Z. B. Vier Personen sollen 60 Gulden so miteinander theilen, daß die zweyte um 4 mehr bekömmt, als die erste, die dritte um 6 mehr, als die zweyte, und die vierte zweymal so viel, als die dritte. Es sind hier eigentlich nicht vier unbekannte Größen, wie es scheinen könnte, sondern es ist nur eine; denn wenn ich den Antheil der ersten Person weis, so darf ich nur 4 dazu addiren, so habe ich den Antheil der zweyten. Setze ich zu diesem 6, so giebt das den Antheil der dritten, und dieser doppelt genommen den Antheil der vierten. Oder, zwo Personen sollen 60 Gulden so theilen, daß eine um Zwölf mehr bekomme, als die andere. Hier brauche ich wieder nur eine unbekannte Größe entweder für den Antheil der ersten, oder zweyten Person. Nehme ich den kleinern Antheil, und heiße ihn x, so ist der größere Antheil $x + 12$, oder wenn der größere x genannt wird, heißt der kleinere $x - 12$.

b) II. Regel. Man schreibe die Aufgabe algebraisch, d. i. man benenne erstens die unbekannten Größen mit den letzten, die bekannten mit den ersten Buchstaben des Alphabets, und drücke die Bedingnisse der Aufgabe durch die gehörigen Zeichen aus. Es sey

die

die eben angeführte erste Aufgabe. Was die erste Person bekomme, das weis man nicht. Man schreibe also die vier Antheile so an:

Antheil des I. $= x$
Antheil des II. $= x + 4$
Antheil des III. $= x + 4 + 6 = 2x + 10$
Antheil des IIII. $= (x + 10) \times 2 = 2x + 20$
$60 = a$

Zur Uebung folgen noch einige Beyspiele. Vier sollen 60 Gulden so theilen, daß der zweyte noch so viel bekomme, als der erste, der dritte dreymal so viel, als der zweyte, der vierte viermal so viel, als der dritte.

I. $= x$
II. $= 2x$
III. $= 6x$
IIII. $= 24x$

Von der nemlichen Summe soll der zweyte um 3 weniger, als der erste, der dritte um 4 weniger, als der zweyte, der vierte um 6 weniger als der dritte bekommen.

I. $= x$
II. $= x - 3$
III. $= x - 3 - 4 = x - 7$
IIII. $= x - 3 - 4 - 6 = x - 13.$

Von der nemlichen Summe soll der zweyte halb so viel, als der erste, der dritte halb so viel, als der zweyte, und der vierte halb so viel, als der dritte bekommen.

I — x

$$\text{I.} = x$$

$$\text{II.} = \frac{x}{2}$$

$$\text{III.} = \frac{x}{4}$$

$$\text{IIII.} = \frac{x}{8}$$

Diese Verrichtung nennet man die **Denomination**, oder **Benennung**, in der man die Anfänger öfters üben muß.

c) III. Regel. Man suche alsdann die Aufgabe in Form einer Gleichung auszudrücken, die sich aus sorgfältiger Ueberlegung der Bedingnisse ergiebt, welche die Aufgabe enthält. Hier helfen keine Regeln. Das Nachdenken, und die Ueberlegung muß das meiste thun.

d) IIII. Regel. Ist die Gleichung gefunden, so verfahre man nach der (§. 134. a) gegebenen allgemeinen Regel, und bringe alle bekannten Größen von der unbekannten weg, so, daß diese allein auf einer Seite bleibt, so ist die Aufgabe aufgelöst. Die Probe davon ist, wenn die in Zahlen ausgedrückte Größe x den Bedingnissen der Aufgabe genug thut, welches man allzeit versuchen muß.

Diese sowohl, als die (§. 134. a) angeführte Regeln muß man bey Auflösung aller Aufgaben, auch jener mit mehrern unbekannten Größen, und von höhern Graden beobachten, nur kommen noch einige andere

dere dazu. Ich will jetzt die Anwendung derselben in verschiedenen Aufgaben zeigen, zuerst sie in Ziffern, dann allgemein auflösen, und einige Exempel zur Uebung in der nemlichen Art beysetzen, doch so, daß ich nur die Gleichung, und den Werth von x angebe.

138. Ein Vater ist 30 Jahre älter, als sein Sohn. Beyde miteinander sind 100 Jahre alt. Wie alt ist jeder?

Alter des Sohnes x

Alter des Vaters $x + 30$

Weil die zwey Alter zusammen 100 Jahre ausmachen sollen, so hat man die Gleichung:

$$x + x + 30 = 100$$
$$2x + 30 = 100$$
$$2x = 100 - 30$$
$$2x = 70$$
$$x = \frac{70}{2} = 35$$

Also ist der Sohn alt 35, der Vater $35 + 30 = 65$ und es ist $65 + 35 = 100$, wie es seyn soll.

Hieße das Alter des Vaters x

Das Alter des Sohnes $x - 30$, so wäre

$$x + x - 30 = 100$$
$$2x - 30 = 100$$
$$2x = 130$$

$x = 65$ das Alter des Vaters. Zieht man 30 davon ab, so bleibt das Alter des Sohnes 35. wie oben.

Allge-

Allgemeine Auflösung
Die Summe der Jahre sey a,
Die Differenz d,
Das Alter des Sohnes x
Das Altar des Vaters $x + d$. Die Gleichung ist wieder, wie oben.

$$x + x + d = a$$
$$2x + d = a$$
$$2x = a - d$$
$$x = \frac{a - d}{2}$$ das Alter des Sohnes.

Das Alter des Vaters ist $x + d$, und weil ich jetzt schon weis, was x gilt, setze ich seinen Werth an die Stelle von x, so ist das Alter des Vaters $\frac{a - d}{2} + d$, oder $\frac{a - d + 2d}{2} = \frac{a + d}{2}$. Hieraus erhalte ich also eine allgemeine Auflösung aller Aufgaben dieser Art. Wenn die Summe zwoer Größen a, und ihre Differenz d gegeben ist, so ist die größere $\left(\frac{a + d}{2}\right)$ gleich der halben Summe und der halben Differenz, und die kleinere $\left(\frac{a - d}{2}\right)$ gleich der halben Summe minder der halben Differenz.

Aufgaben dieser Art. I. Zween verlieren in einem Spiele zusammen 14 Gulden, und einer um 4 mehr, als der andere. Einer verliert 9, der andere 5 Gulden.

II. Zween Ringe kosten 50 Ducaten, einer um 10 mehr als der andere. Einer kostet 20 der andere 30 Ducaten.

III. Die Summen zwoer Zahlen ist

35	die Differenz	1	die Zahlen sind	18	17
15	- - - -	12	- - - -	$13\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$
6	- - -	12	- - - -	9. —	3.
$\frac{1}{2}$	- - -	$\frac{1}{3}$	- - - -	$\frac{5}{12}$.	$\frac{1}{12}$.
100	- - -	0	- - - -	$\frac{101}{2}$.	$\frac{99}{2}$.

139. 6 soll in zween Theile so getheilt werden, daß, wenn ich einen Theil mit 12, und den andern mit 6 multiplicire, zwey gleiche Producte herauskommen.

Ein Theil sey x
Der andere $6 - x$.

Wenn ich den ersten mit 12, den andern mit 6 multiplicire, müssen die Producte einander gleich seyn. Das giebt die Gleichung

$$12 \times x = (6 - x)6$$
$$12x = 36 - 6x$$
$$12x + 6x = 36$$
$$18x = 36$$
$$x = \frac{36}{18} = 2.$$

Also ist $x = 2$, ein Theil. Der zweyte $6 - x$, oder $6 - 2 = 4$.

Nun ist $2 \times 12 = 24$, und $4 \times 6 = 24$.

Allge-

Allgemein. Die zu theilende Zahl sey a
ein Theil x
der andere a — x
der erste Multiplicator m,
der zweyte n.

$$x \times m = (a - x)n$$
$$mx = an - nx$$
$$mx + nx = an$$
$$x = \frac{an}{m + n}$$

Diese Formel läßt sich wieder als eine Regel ausdrücken, wodurch alle Aufgaben dieser Art aufgelöst werden.

Z. B. Zween Kaufleute haben 1800 fl. zusammen gelegt, und beyde gleichviel damit gewonnen, der erste dreymal, der zweyte fünfmal so viel, als ihre Einlage betrug. Wie viel hat jeder eingelegt? Einer legte ein 1125, der zweyte 675. $1125 \times 3 = 3375$. $675 \times 5 = 3375$.

Zween Spieler legen 200 fl. mit der Bedingniß zusammen, daß der erste seinen Einsatz sechsmal, der zweyte zehnmal vom Gewinnste bekommen soll. Nach dem Spiele gewann einer so viel, als der andere. Was hat jeder eingelegt? 125, und 75. $125 \times 6 = 75 \times 10$.

$$a = 15$$
$$m = 6$$
$$n = 8$$

So ist $x = 8\frac{4}{7}$, $a - x = 6\frac{3}{7}$. $8\frac{4}{7} \times 6 = 6\frac{3}{7} \times 8 = \frac{360}{7}$.

140. Es soll ein Haus ausgespielt werden. Setzt einer 5 fl. so fehlen 42 fl. Setzt einer 6 fl. so bleiben 58 fl. übrig. Was gilt das Haus? Und wie viele setzen ein?

Hier hat man die Wahl, den Werth des Hauses, oder die Anzahl der Personen, die einsetzen, als unbekannt anzunehmen. Es sey x die Anzahl der Personen, so sucht man den Werth des Hauses auf eine doppelte Art, und setzt beyde Werthe einander gleich.

Es sind x Personen, und wenn jede 5 giebt, geben alle zusammen $5x$. Es fehlen aber alsdenn noch 42 fl. am Werthe des Hauses, welcher ist $5x + 42$. Auf die nemliche Art findt man diesen Werth $6x - 58$. Also ist die Gleichung $5x + 42 = 6x - 58$. und $x = 100$. Der Werth des Hauses ergiebt sich hieraus 542.

Nimmt man x für den Werth des Hauses, so muß die Anzahl der einlegenden Personen auf zweyerley Weise ausgedrückt werden. Die erste Einlage ist der Werth des Hauses weniger 42 fl. oder $x - 42$, und die zweyte $x + 58$. Weil nun das erstemal jede Person 5, das zweytemal 6 fl. einlegt, so ist $\frac{x-42}{5}$ und $\frac{x+58}{6}$ die Anzahl der Einlegenden. Aus der Glei-

chung

chung folgt $x = 542$, wie bey der ersten Auflösung, und die Anzahl der Personen 100.

Auf die erste Art.

Erste Einlage einer Person a
Zweyte Einlage - - - c
Was das erstemal fehlt b
Was das zweytemal übrig an dem Werthe des Ganzen - - - - d
Anzahl der Personen x

$ax + b = cx - d$. Die zween Werthe des Ganzen.

$$\frac{b+d}{c-a} = x$$

Auf die zweyte Art.

Werth des Ganzen x

$\frac{x-b}{a} = \frac{x+d}{c}$. Die Anzahl der Personen auf zweyerley Art ausgedrückt $\frac{ad+bc}{c-a} = x$.

Beyspiele von der nemlichen Art. Eine Mutter hat Aepfel. Giebt sie jedem ihrer Kinder 6, so bleiben 5 übrig. Giebt sie jedem 7, so fehlen 3. Wie viele Aepfel hat sie? und wie viele Kinder? Aepfel 53, Kinder 8.

Eine Bäuerinn trägt einige Pfunde Garn zum Weber, und verlangt, daß er hundert Ellen Leinwand daraus wirken soll. Dieser sagt, es wären 6 Pfunde

zu wenig. Sie verlangt also nur 90 Ellen. Und da bleiben 4 Pfunde übrig. Wie viele Pfunde Garn hatte sie? Und wie viele brauchte man zu einer Elle?

Ist x die Anzahl der Pfunde, so braucht man zu einer Elle $\frac{x+5}{100}$, oder $\frac{x-4}{90}$. Ist x das, was man zu einer Elle braucht, so ist $100x-6$, oder $90x+4$ die Anzahl der Pfunde. Es sind also 94 Pfunde Garn, und zu einer Elle braucht man ein Pfund

Ein Schweintreiber gab für 15 Schweine Zoll 1 Schwein, und bekam 3 fl. 30 kr., oder 210 Kreuzer heraus. Ein andersmal bezahlt er für 54 Schweine Zoll 1 Schwein, und 24 Kreuzer. Wie viel Zoll trifft für ein Schwein? Und was gilt ein Schwein?

Ist x der Werth eines Schweins, so ist der Zoll für eines $\frac{x-210}{15}$, oder $\frac{x+24}{54}$, und x oder der Werth eines Schweines 5 Gulden. Ist x der Zoll für ein Schwein, so ist der Werth eines Schweines $15x+210$, oder $54x-24$, und x, oder der Zoll für ein Schwein 6 Kreuzer.

141. Man soll eine Zahl finden, welche, wenn ich zu ihr ihre Hälfte addire, so viel über 60 beträgt, als sie einzeln genommen unter 65 ist.

Also die Zahl sey x, so ist $x+\frac{x}{2}-60=65-x$, oder $2x+x-120=130-2x$. Folg- lich

lich $5x = 250$, und $x = 50$. Es ist aber $50 + 25 - 60 = 15$, und $65 - 50 = 15$.

Wenn die Zahl x drey, vier, fünf, und sechsfach genommen wird, machet sie so viel über 436, als sie selbst unter 436 ist.

$$3x + 4x + 5x + 6x - 436 = 436 - x$$
$$18x - 436 = 436 - x$$
$$x = 45\tfrac{17}{19}.$$
$$826\tfrac{2}{19} - 436 = 436 - 45\tfrac{17}{19} = 390\tfrac{2}{19}.$$

142. 36 Gulden sollen unter 6 Personen so getheilt werden, daß die nachfolgende Person immer um eins mehr bekomme, als die vorhergehende.

Die erste bekömmt x, die zweyte $x + 1$, die dritte $x + 2$ 2c.

$6x + 15 = 36$. $x = 3\tfrac{1}{2}$. Also sind die Theile der übrigen $4\tfrac{1}{2}$, $5\tfrac{1}{2}$, $6\tfrac{1}{2}$, $7\tfrac{1}{2}$, $8\tfrac{1}{2} = 36$.

Von der nemlichen Art sind:

Vier Soldaten haben 112 Gulden so zu theilen, daß jederzeit der folgende noch so viel, und um 2 mehr bekomme, als der vorhergehende. Der Theil x des ersten ist 6.

Eine Erbschaft beträgt 84000 Gulden. Sie fällt einer schwangern Frau zu mit der Bedingniß: würde sie eine Tochter gebähren, so sollte die Mutter zweymal so viel bekommen, als die Tochter. Würde sie aber einen Sohn gebähren, so sollte dieser zweymal so viel als die Mutter erhalten. Nun gebahr sie einen Sohn,

und eine Tochter. Wie muß die Erbschaft nach dem Willen des Erblassers getheilt werden? Der Antheil der Tochter, als der kleinste sey x, der Mutter $2x$, des Sohnes $4x$. Also

$7x = 84000$, $x = 12000$. Oder wenn der Antheil des Sohnes x genannt wird, so ist der Antheil der Mutter $\frac{x}{2}$, der Tochter $\frac{x}{4}$, und $x = 48000$.

143. Aufgaben, worinn mehrere Brüche vorkommen.

Ein Bauerjunge wird gefragt, wie viele Kühe sein Vater habe, und Antwortet: Wenn er den halben, dritten und vierten Theil davon hätte, so hätte er um eine mehr, als er wirklich hat. Er hat x. Also

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1.$$ Bringt man alle Brüche unter den nemlichen kleinsten Nenner.

$$\frac{6x + 4x + 3x}{12} = x + 1.$$

$$13x = 12x + 12$$

$$x = 12. \text{ und } \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13.$$

Eine Zahl zu finden, derer dritter Theil minder dem vierten was immer für einer beliebigen Zahl a gleich sey. Die zu suchende Zahl sey x. Also $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = a$. Also $x = 12a$. Man darf nur a mit 12 multipliciren, so hat man die verlangte Zahl. Z. B. Es soll $7 = a$, übrig bleiben, wenn ich den vierten Theil einer Zahl von

von ihrem dritten abziehe. $7 \times 12 = 84$ ist die verlangte Zahl. Ihr dritter Theil ist 28, ihr vierter 21. Es ist aber $28 - 21 = 7$.

Allgemein. Ist der kleinere Nenner b, und der größere c, so ist

$$\frac{x}{b} - \frac{x}{c} = a$$

$$cx - bx = abc$$

$$x = \frac{abc}{c-b}.$$

Z. B. Es soll $11 = a$ übrig bleiben, wenn ich vom fünften Theile einer Zahl den siebenten abziehe.

$x = \frac{11 \times 5 \times 7}{7-5} = 192\frac{1}{2}$. Davon ist der fünfte Theil $\frac{539}{14}$, der siebente Theil $\frac{385}{14}$, und $\frac{539}{14} - \frac{385}{14} = \frac{154}{14} = 11$.

Eine Bäurinn verkauft von ihren Eyern, die sie zu Markt bringt, den halben Theil und giebt ein halbes Ey darein. Dann wieder den halben Theil des Restes, und giebt ein halbes Ey darein. Und endlich noch den halben Theil des Restes, und giebt ein halbes Ey darein. Da waren alle ihre Eyer verkauft; und doch hatte keine Käuferinn ein halbes Ey bekommen. Wie viele Eyer brachte sie zu Markt? Ich will dieses Exempel ausführlich hersetzen, damit man es in ähnlichen Fällen zum Muster nehmen kann. Die Zahl der Eyer sey x.

Die I. Käuferinn bekam $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Es blieben

noch übrig $x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x - 1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Die II. Käuferinn bekam von diesem Reste den halben Theil, und $\frac{1}{2}$ Ey dazu. Oder $\frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x - 1 + 2}{4} = \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.

Dieses wird vom vorigen Reste $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ abgezogen, oder $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2x - 2 - x - 1}{4} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$.
Von diesem Reste bekam die III. Käuferinn den halben Theil, und noch ein halbes Ey, oder $\frac{x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$
$= \frac{x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$.

Das, was alle drey Käuferinnen erhalten haben, macht die Anzahl x aller zu Markt gebrachten Eyer aus.

Also $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8} = x$.

$$\frac{4x + 2x + x + 4 + 2 + 1}{8} = x$$

$$7x + 7 = 8x$$

$$7 = x.$$

Die erste Käuferinn bekam $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$
Die zweyte - - - - $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$
Die dritte - - - - $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
also alle zusammen 7 Eyer, und kein halbes.

144.

144. Einer kauft für sein Geld, (x) Wein, und verliert dabey den halben Theil dieses Geldes ($\frac{x}{2}$) und noch 60 fl. Mit dem Reste fängt er einen andern Handel an, und gewinnt $\frac{1}{3}$ des Restes. Und so hatte er $\frac{3}{8}$ seines Geldes $\left(\frac{3x}{8}\right)$ wieder. Wie viel Geld hatte er im Anfange?

$$x - \frac{x}{2} - 60, \text{ oder } \frac{2x - x - 120}{2} = \frac{x - 120}{2}$$

ist der Rest nach der ersten Handelschaft; damit gewann er den dritten Theil dieses Restes bey der zweyten Handelschaft, oder $\frac{x - 120}{6}$. Es war also jetzt sein Vermögen: $\frac{x - 120}{2} + \frac{x - 120}{6}$. Und das betrug $\frac{3x}{8}$ seines Geldes vor der Handelschaft, oder

$$\frac{x - 120}{2} + \frac{x - 120}{6} = \frac{3x}{8}$$

$$\frac{x}{2} - 60 + \frac{x}{6} - 20 = \frac{3x}{8}$$

$$24x + 8x - 80 \times 6 \times 8 = 18x$$

$$14x = 80 \times 6 \times 8$$

$$x = \frac{80 \times 6 \times 8}{14} = \frac{40 \times 6 \times 8}{7} = \frac{1920}{7} =$$

$273\frac{2}{7}$ fl.

$$\frac{3x}{8} = 102\tfrac{6}{7}, \text{ und } \frac{x - 120}{2} + \frac{x - 120}{6} = 102\tfrac{6}{7}$$

145.

145. Meine Mutter gab mir, und meinen 4 Geschwistrigen (also sind es 5 Kinder) zu unserm Erbtheile noch 3 fl. Die Hälfte meines Antheiles gab ich den Armen, einen Gulden verlor ich, und so hatte ich nichts mehr. Wie groß war mein Antheil?

Die ganze Erbschaft x, dazu gab die Mutter 3. Also $x + 3$. Das wurde in 5 Theile getheilt, und der Antheil von einem war $\frac{x+3}{5}$. Der halbe Theil der Armen $\frac{x+3}{10}$. Und noch eines verloren. Also kam von meinem Antheile $\frac{x+3}{5}$ hinweg $\frac{x+3}{10} + 1$ folglich $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{10} - 1 = 0$, oder $\frac{x+3}{5} = \frac{x+3}{10} + 1$. $x = 7$.

146. Ein Vater hinterläßt seinen Kindern eine Summe x. Das erste bekömmt 1000 fl. zum voraus, und den sechsten Theil des Restes. Das zweyte 2000 fl. und den sechsten Theil des Restes. Und so bekam jedes folgende um 1000 fl. mehr, und den sechsten Theil vom Reste. Nachdem nun eines nach dem andern bis auf das letzte Kind ihre Theile weggezogen hatte, ließen sie diesem den Rest allein. Nichtsdestoweniger hatte eines so viel als das andere bekommen. Wie groß war die Massa? Und wie viel waren es Kinder? Man suche den Antheil des ersten und zweyten

ten Kindes, und setze sie einander gleich, weil ein Kind so viel bekam, als das andere.

$\frac{5000 + x}{6} = \frac{55000 + 5x}{36}$. $x = 25000$. Kinder waren es 5, und jedes erhielt 5000 fl. Man wird finden, daß alle Bedingnisse genau erfüllt werden.

Auf die nemliche Art werden folgende Aufgaben aufgelöst.

Vier Söhne theilen eine Erbschaft so. Der erste nimmt 3000 fl. weniger, als die halbe Erbschaft, der zweyte 1000 weniger, als das Drittel der Erbschaft, der dritte nimmt ein Viertel der Erbschaft, der vierte 600 fl. und ein Fünftel der Erbschaft. Einer bekam so viel als der andere. $\frac{x}{2} - 3000 = \frac{x}{3} - 1000$. $x = 12000$. Einer bekam 3000 fl.

Wäre aber die Bedingniß nicht ausgedrückt, daß einer so viel, als der andere bekäme, dann wäre die Gleichung $\frac{x - 6000}{2} + \frac{x - 3000}{3} + \frac{x}{4} + \frac{3000 + x}{5} = x$. $= 12000$.

Einer giebt dem ersten Armen ein Sechstel seines Geldes $\left(\frac{x}{6}\right)$ und 4 Kreuzer, dem zweyten $\frac{1}{6}$ des Restes, und 8 kr., dem dritten $\frac{1}{6}$ des Restes und 12 kr. u. s. f., daß jeder zum Sechstel des Restes um 4 kr. mehr bekömmt. Einer bekam so viel als der andere.

Wie

Wie viel hätte er Geld? Wie viele Arme waren es?
$\frac{x+24}{6} = \frac{5x-24+288}{36}$. $x = 120$. Es waren 5 Arme.

Ein Kaufmann vermehrt jährlich sein Geld x um ein Drittel weniger 200 fl., die er ins Hauswesen braucht. Nach 3 Jahren ist er zweymal reicher, als er anfangs war, oder hatte 2x. Wie viel betrug x, das Geld, das er anfangs hatte?

Nach dem I. Jahre hatte er $x - 200 + \frac{x-200}{3} = \frac{4x-800}{3}$

$x = 2960$

Nach dem II. J. $\frac{16x-5600}{9}$ nach Jahr I. 3680

Nach dem III. J. $\frac{64x-29600}{27}$ II. 4640

III. 5920 und $\frac{5820}{2} = 2960$.

Also $\frac{64x-29600}{27} = 2x$. $x = 2960$.

147. Es hat Jemand 3 Schäfl Dünkel mehr, als Haber; und 2 Schäfl Roggen mehr, als Dünkel, in allem 44 Schäfl. Wie viel hat er von jeder Art?

Haber x
Dünkel $x+3$
Roggen $x+5$
$3x+8 = 44$. $x = 12$.

Das Schäfl Dünkel gilt 6, das Schäfl Haber 5 fl. Man will für 77 fl. von beyden Arten gleich viele Schäfl kaufen. Wie viele Schäfl kann man kaufen? Nemlich x. Alle Schäfl Haber kosten 5x fl. Alle

Schäfl

Schäfl Dünkel, weil sie eben so viel seyn müssen, 6 x. Also $5x + 6x = 77$. $x = 7$.

Man will Wein kaufen, und zwar noch so viele Eimer alten, als neuen Wein. Der alte kostet 45, der neue 20 fl. Wie viele Eimer bekömmt man um 255 fl.? Neuen Wein x, alten 2x. Der neue kostet 20x, der alte $2x \times 45 = 90x$. Also $110x = 255$. $x = 2\frac{7}{22}$. Folglich alten Wein $4\frac{14}{22}$. Der neue kostet $46\frac{8}{22}$, der alte $208\frac{14}{22}$ fl., oder zusammen beyde 255 fl.

Wollte man noch so viel neuen als alten Wein kaufen, so wäre

der alte $= x$ Zahl der Eimer. Der Werth 45x
der neue $= 2x$ - - - - - - 40x
$85x = 255$. $x = 3$ Eimer alter Wein. Werth 135
6 Eimer neuer Wein. Werth 120
255

Fünfzehn Pfund Butter, und 9 Pfund Schmalz kosten 8. fl. 27 kr., oder 507 kr. Das Pfund Schmalz kostet um 3 kr. mehr, als das Pfund Butter. Wie viel kostet jedes?

Werth eines Pfund Butter x
Werth eines Pfund Schmalz $x + 3$
$15x + 9x + 27 = 507$. $x = 20$, $x + 3 = 23$.

Eine Garnison kostet täglich 6000, eine andere 7000. In wie vielen Tagen werden beyde zusammen 78000 Gulden kosten? Die Zahl der Tage x.

$$6000x + 7000x = 78000.$$
$$6x + 7x = 78 \qquad x = 6.$$

148. Die

148. Die Maaß guten Weins gilt 30 des schlechtern 20 kr. Nun möchte man den Wein so mischen, daß die Maaß um 24 kr. käme. Wie viel von jeder Sorte muß man dazu nehmen? Gesetzt, man möchte eine Maaß, oder einen Eimer, oder überhaupts die Quantität a gemischten Wein haben.

Vom bessern nimmt x. Der Preis davon ist
$30 \times x = 30x$
also vom schlechtern $a - x$. Der Preis $\overline{a - x} \times 20 =$
$20a - 20x$
$30x + 20a - 20x = 24a$
$10x = 4a$
$x = \frac{2}{5}a$. Folglich $a - x = a - \frac{2}{5}a = \frac{5a - 2a}{5}$
$= \frac{3}{5}a$.

Man muß also vom bessern $\frac{2}{5}$, vom schlechtern $\frac{3}{5}$ nehmen. Z. B. Zu einem Eimer 24 Maaß guten, und 36 Maaß schlechtern Weins. Und wirklich $24 \times 30 + 36 \times 20 = 60 \times 24 = 1440$.

Allgemein. Die verlangte Quantität sey a
Der Werth des bessern b
Des schlechtern. c
Des gemischten d
Die Quantität des bessern x
Des schlechtern $a - x$

$bx + ac - cx = ad$
$bx - cx = ad - ac$
$x = \frac{ad - ac}{b - c}$. $a - x = a - \frac{ad + ac}{b - c} =$
$\frac{ab - ac - ad + ac}{b - c} = \frac{ab - ad}{b - c}$ und wenn man die verlangte Quantität, sie mag wenig, oder viel betragen, $= 1$ nimmt, ist $x = \frac{d - c}{b - c}$ und $a - x = \frac{b - d}{b - c}$

Man löste sonst Aufgaben dieser Art durch die Alligationsregel auf. Der Gebrauch der Algebra macht selbige jetzt überflüßig.

Zur Uebung dienen folgende Beyspiele. Der bessere Wein gilt 32, der schlechtere 18, der gemischte soll 24 gelten, so ist $x = \frac{3}{7}$, $a - x$ oder $1 - x = \frac{4}{7}$. Also nimmt man $\frac{3}{7}$ Maaß, oder Eimer rc. vom bessern, und $\frac{4}{7}$ vom schlechtern.

Ein fünfzehneimriges Faß soll mit gemischtem Wein, den Eimer zu 30 fl., gefüllt werden. Der bessere gilt 42, der schlechtere 24 fl. $x = 5$, $a - x = 10$. oder $x = \frac{1}{3}$, $a - x = \frac{2}{3}$. Also nimmt man noch so viele Eimer vom schlechtern, als vom guten.

Nimmt man statt des schlechtern Weins Wasser, d. i. mischt man den Wein mit Wasser, so ist der Werth des Wasser $= 0$, oder $c = 0$, weil das Wasser nichts kostet. Also verschwinden in den Formeln

von x, und a — x alle Glieder, worinn c vorkömmt, und x ist $= \frac{ad}{b}$, $a - x = \frac{ab - ad}{b}$ oder wenn

$a = 1$, $x = \frac{d}{b}$, $a - x = \frac{b-d}{b} = 1 - \frac{d}{b}$.

Würde im vorhergehenden Exempel statt des schlechten Weins Wasser genommen, so wäre, weil

$a = 15$
$b = 42$
$c = 0$
$d = 30$, $x = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$, $a - x = \frac{2}{7}$.

Also müßte man $\frac{5}{7}$ Wein, $\frac{2}{7}$ Wasser nehmen ein fünfzehneimriges Faß zu füllen.

Ein Bierschenk hat den Eimer Waizenbier für 4 fl. bezahlt. Nun möchte er gern die Maaß um 4 kr. ausschenken, und doch an der Maaß einen Kreuzer gewinnen. Wie viel Wasser darf er daran schütten? Oder, was eines ist, wie viele Maaß Bier darf er für sich behalten.

$a = 60 = 1$
$b = 5$
$c = 1$

Denn es muß jede Maaß Bier jetzt um einen Kreuzer vermehret werden; denn auch die Maaß Wasser gilt 1, damit der Werth des Wassers mit dem auf das Bier geschlagenen Kreuzer 60 Kreuzer betrage, welche der Wirth gewinnen will.

$d = 4$. Also $x = \frac{ad - ac}{b - c} = \frac{3}{4}$ und

$a - x = \frac{1}{4}$. Folglich darf er 15 Maaß für sich behalten,

halten, und muß 45 Maaß Bier, und 15 Maaß Wasser mischen.

149. Schon einige der vorhergehenden Aufgaben lassen sich mit zwoen unbekannten Größen, wie die (§. 139. und alle §. 148.) und wie ich erfahren habe, von Anfängern leichter auflösen. Von dieser Art sind auch die folgenden, wobey ich auch nur eine unbekannte annehme. Indessen kann man sie hernach zur Uebung mit zwoen unbekannten Größen gebrauchen, wenn die Auflösungsart unten wird gezeigt werden, weil ich da nicht viele Beyspiele anführen werde.

Ein Vater hinterläßt seinen 8 Kindern 2100 fl. Ein Sohn soll 300, eine Tochter 200 fl. bekommen. Wie viele Söhne und Töchter waren es?

Söhne x. Ihre Antheile zusammen $x \times 300$
Töchtern $8 - x$. Ihre Antheile $(8 - x)\, 200$

Gleichung. $300x + 1600 - 200x = 2100$. $x = 5$, Töchtern 3.

Ein Arbeiter wird auf 30 Tage gedungen. Wenn er arbeitet, bekömmt er des Tages 7 Groschen; feyert er, so wird er um 5 Groschen gestraft. Nach 30 Tagen, in welchen er theils gearbeitet, theils gefeyert hat, war er nichts schuldig, und hatte nichts einzunehmen. Wie viele Tage hat er gearbeitet? Wie viele gefeyert?

Tage der Arbeit x Lohn $7x$

Tage, wo er nicht gearbeitet $30 - x$

Strafe $(30 - x)\,5$.

Gleichung $7x = 150 - 5x$. $x = 12\frac{1}{2}$. $30 - x = 17\frac{1}{2}$.

Lohn $87\frac{1}{2}$ Groschen

Strafe $87\frac{1}{2}$ Groschen.

Man kauft einmal 16 Aepfel, und 20 Birnen um 4 kr., das zweytemal 12 Aepfel, und 60 Birnen um 6 kr. Wie hoch kam ein Apfel, und eine Birne?

Der Apfel kostet x, folglich 16 Aepfel $16x$. Und also 20 Birnen kosten $4 - 16x$, und eine $\frac{4 - 16x}{20}$. Eben so kosten 60 Birnen $6 - 12x$, und eine $\frac{6 - 12x}{60}$. Da nun eine Birne einmal so viel kostete, als das anderemal, ist die Gleichung

$$\frac{4 - 16x}{20} = \frac{6 - 12x}{60}$$

$$\frac{1 - 4x}{5} = \frac{1 - 2x}{10}$$

$$2 - 8x = 1 - 2x$$

$1 = 6x$, und $x = \frac{1}{6}$. Ein Apfel kostete $\frac{1}{6}$ kr., oder 6 Aepfel einen Kreuzer. Folglich galt eine Birne $\frac{1 - 4 \times \frac{1}{6}}{5} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{5} = \frac{1}{15}$ kr.

150. Wie

150. Wäre eine Gesellschaft noch so stark, und halb so stark, als sie ist, so bestände sie aus 30 Personen. Wie viele sind es jetzt? x

$$2x + \frac{x}{2} = 30. \quad x = 12.$$

Drey Weiber kaufen etliche Pfund Flachs. Die erste nimmt den vierten Theil, die zweyte vom Rest den sechsten Theil, der dritten bleiben 15 Pfund.

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 15 = x. \quad x = 24.$$

Ein Spieler verspielt die Hälfte, und $\frac{3}{8}$ seines Geldes, und es bleiben ihm 15 fl.

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{8} + 15 = x. \quad x = 120.$$

151. Die meisten der folgenden Aufgaben setzen die Regel Detri voraus, und können also jetzt von Anfängern noch nicht aufgelöset werden. Weil sie aber doch nur eine unbekannte Größe enthalten, will ich sie hier anführen, damit man die Aufgaben dieser Art beysamen habe. Die Auflösung wird man freylich erst weiter unten verstehen lernen.

Ein Schneck und ein Wurm, die 30. Ellen voneinander sind, kriechen einander entgegen. Der Schneck kriecht täglich 3 Ellen vorwärts, und eine zurück, der Wurm täglich 4 Ellen vorwärts, und eine zurück. In wie vielen Tagen werden sie einander begegnen? Der Schneck macht eigentlich dem Wurm entgegen täglich

lich 2, und der Wurm jenem entgegen 3 Ellen. Alsdann begegnen sie sich, wenn ihr zurückgelegter Weg 30 Ellen beträgt.

a b c

Der Schneck sey in a, der Wurm in c, und in b sollen sie einander begegnen. Der Schneck muß also den Weg ab, und der Wurm den Weg cb machen, und $ab + cb = 30$ Ellen. Man muß diese beyde Wege ausrechnen.

Die Anzahl der Tage, die sie brauchen, bis sie einander begegnen, heiße x. In einem Tage macht der Schneck 2 Ellen. Wie viele Ellen wird er in den Tagen x machen?

Oder T. E. T. E.

$1 : 2 :: x : 2x$, und der Wurm

$1 : 3 :: x : 3x$

Also $2x + 3x = 30$

$5x = 30$

$x = 6$. In sechs Tagen begegnen sie einander.

Allgemein. Es seyn A, und B zween Körper, Bothen etc. die sich gegeneinander bewegen. A mache in der Zeit a den Weg c, und B in der nemlichen Zeit den Weg d. Wann begegnen sie sich? Ihre Entfernung beym Anfange der Bewegung sey m.

$$a : c :: x : \frac{cx}{a}$$

$$a : d :: x : \frac{dx}{a}$$

Also

Also ist $\frac{cx}{a} + \frac{dx}{a} = m$, oder $cx + dx = am$,

und $x = \frac{am}{c+d}$

Zwo Personen reisen einander entgegen. A macht täglich 6, B $7\frac{1}{2}$ Meilen. In 8 Tagen kommen sie zusammen. Wie weit waren die Städte entfernt voneinander, von denen sie abreisten? Hier ist $m = x$, und an die Stelle von x in der Formel gehört 8.

Also $8 = \frac{ax}{c+d}$ oder weil $a = 1$, $c = 6$, $d = 7\frac{1}{2}$ so ist $8 = \frac{x}{6+7\frac{1}{2}}$ oder $8 = \frac{x}{\frac{27}{2}}$ oder $8 = \frac{2x}{27}$, $216 = 2x$, $x = 108$, ist die Entfernung der Städte.

Zween Bothen sind 100 M. $= m$ voneinander entfernt. A macht täglich $5\frac{3}{4}$ M $= c$, B $6\frac{1}{2}$ M $= d$. In wie vielen Tagen (x) kommen sie zusammen?

$$x = \frac{am}{c+d} = \frac{100}{5\frac{3}{4}+6\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{23}{4}+\frac{26}{4}} = \frac{100 \times 4}{49}.\quad x = 8\frac{8}{49}.$$

Zween Bothen gehen gegeneinander, und begegnen sich in 8 Tagen. A hat $\frac{1}{3}$ des Wegs, und 12 Meilen, B $\frac{1}{4}$ des Wegs, und 24 Meilen gemacht. Wie weit sind die Orte entfernt, von denen sie ausgiengen? $\frac{x}{3} + 12 + \frac{x}{4} + 24 = x$. $x = 86\frac{2}{5}$ M. Entfernung A von B.

Der Weg von A ist $40\frac{4}{5}$ M. von B $45\frac{3}{5}$ M. zusammen $86\frac{2}{5}$ M.

Zwo Städte liegen 100 Meil. voneinander, und zween Couriere laufen gegeneinander. A machte allein den ganzen Weg in 12, B in 13 Tagen. In wie vielen Tagen werden sie zusammen kommen? und wie viele Meilen hat jeder gemacht? Die Tage heißen x. Man suche den Weg von beyden in den Tagen x.

Tag. Meil.

$$A \quad 12 : 100 :: x = \frac{100x}{2} \text{ M.}$$

$$B \quad 13 : 100 :: x = \frac{100x}{13} \text{ M.}$$

Die Gleichung ist also $\frac{100x}{12} + \frac{100x}{13} = 100$, $x = 6\frac{6}{25}$ Tage, woraus man findt, daß A 52, B 48 M. gemacht hat. Wenn man die obige Formel brauchen will, und den Weg sucht, den sowohl A als B in einem Tage machen, nemlich $\frac{100}{12}$, und $\frac{100}{13}$ und setzt dieses für c, und d, so findet man ebenfalls $x = 6\frac{6}{25}$.

Die Entfernung der Städte, aus welchen zween Bothen gegeneinander gehen, sey wieder 100 Meilen. In 8 Tagen kommen sie zusammen. B geht täglich $1\frac{1}{2}$ Meile weiter, als A. Wie viele Meilen hat jeder gemacht? A macht täglich x, B $1x + \frac{3}{2}$

T. M. T. M.

$$A \quad 1 : x :: 8 : 8x$$

$$B \quad 1 : x + \frac{3}{2} :: 8 : 8x + 12.$$

Ihr

Ihr ganzer Weg in Meilen ist also $16x + 12$, und weil sie nach Hinterlegung dieses in 8 Tagen zusammentreffen, ist $16x + 12 = 100$, also $x = 5\frac{1}{2}$. So viele Meilen macht A täglich, und also B 7. Nach der Formel, weil an die Stelle des x, 8 kömmt, ist $8 = \frac{100}{x + x + \frac{3}{2}}$, und x wieder $= 5\frac{1}{2}$.

152. Jetzt wollen wir annehmen, die Bothen oder Körper liefen einander nach, und holten sich ein, anstatt daß sie in der vorhergehenden Aufgabe von verschiedenen Orten gegeneinander giengen.

A ist vor fünf Tagen abgereist, und wird von B, welcher täglich $7\frac{1}{2}$ Meilen macht, in 15 Tagen eingeholt. Wie viele Meilen ist A täglich gegangen? Man nenne diese x.

a b c

Von a gehen beyde Bothen aus nacher c, aber A ist schon in b, als B zu gehen anfängt, und hat den Weg ab in 5 Tagen zurückgelegt. B macht den ganzen Weg ac in 15 Tagen, A in $5 + 15$ oder 20 Tagen. Man drücke nun beyde Wege in Meilen aus, und setze sie einander gleich.

	T.	M.	T.	
B	1 :	$7\frac{1}{2}$: :	15 :	$\frac{15 \times 15}{2} = \frac{225}{2}$
A	1 :	x : :	20.	20 x

$$20x = \frac{225}{2} \,.\; x = 5\frac{5}{8}.$$

Also war der Weg, den A voraus in 5 Tagen gemacht hatte $28\frac{1}{8}$ M. Die folgende 15 Tage machte A $48\frac{3}{8}$, zusammen $112\frac{1}{2}$ M. und B macht in 15 Tagen auch so viel.

Heißen die Tage, welche A voraus hat a
Die Tage, in welchen sich A und B zugleich bewegen d.
Die Meilen, die A täglich machet b
Die Meilen, die B täglich machet c,

	T.	M.	T.	M.
so ist B	1 :	c : :	d :	cd
A	1 :	b : :	a + d :	ab + bd.

Also $cd = ab + bd$. Aus dieser Gleichung kann man jedes einzelne unbekannte Stück finden, wenn man nur an die Stelle des Buchstabens, der es anzeigt, x setzt, und dann den Werth davon suchet.

Z. B. Zween Bothen gehen einander nach. A macht täglich 6, B $7\frac{1}{2}$ M. B holt den A in 24 Tagen ein. Wie viele Tage war A voraus? Hier ist der Werth von a unbekannt. Also ist $cd = bx + bd$

$$cd - bd = dx$$
$$\frac{cd}{b} - d = x.$$

oder $\frac{15}{2} \times \frac{24}{6} - 24 = x = 6.$

Ein Both A geht täglich $5\frac{3}{4}$ M. und ist $4\frac{1}{2}$ voraus. B soll ihn in 12 Tage einhollen. Wie viele Meilen muß er des Tages machen? Hier ist c unbekannt, und die Formel $dx = ab + bd$, und $x = \frac{ab}{d} + b = 7\frac{29}{32}$. Auf diese Art machte B $12 \times 7\frac{29}{32} = 94\frac{7}{8}$ M. und A in $4\frac{1}{2} + 12$, oder $16\frac{1}{2}$ Tagen $94\frac{7}{8}$ Meilen.

A ist

A ist 5 Tage voraus, und geht täglich 6 Meilen. B $7\frac{1}{2}$ M. In wie vielen Tagen wird A von B eingeholt werden. $d = x$. Also ist die Formel, $cx = ab + bx$, oder $cx - bx = ab$. $x = \frac{ab}{c-b} = 20$ Tagen; denn A macht in $5 + 20$, oder 25 Tagen, 150 Meilen, und B in 20 Tage eben so viele.

Durch Beyhilfe der nemlichen Formel kann man auch folgende Aufgabe auflösen.

Das Neulicht war den 22 März. Wann wird es das folgende Monat seyn? Alsdann ist es Neulicht, wann Sonne und Mond im Himmel beysammen stehen. Geschieht dieß den 22 May, so entfernt sich der Mond von der Sonne, durchläuft den ganzen Umkreis des Himmels, und würde nach einiger Zeit die Sonne an der alten Stelle antreffen, wenn diese stehen geblieben wäre. Allein die ist indessen auch vorgerückt. Der Mond muß also, um wieder zur Sonne zu kommen, nicht nur einen Cirkel, oder 360 Grade durchlaufen, sondern auch den Weg noch, um den die Sonne indessen vorgerückt. Die Sonne ist also der Both A, der voraus ist, und der Mond B muß ihn einhollen. A ist voraus um 360 Grade, und macht täglich 1 Grad. B macht täglich 13 Grade.

also $a = 360$
$b = 1$
$c = 13$. d, oder $x = \frac{ab}{c-b} = \frac{360 \times 1}{13 - 1} = \frac{360}{12} = 30$.

In 30 Tagen, oder den 21 April ist wieder Neulicht. Genau trifft das freylich nicht zu, weil die Sonne nicht im-

immer in einem Tage genau einen, und der Mond 13 Grade machen.

Um zwölf Uhr stehen der Stund- und Minutenweiser einer Uhr gerade übereinander. Wann wird dieses in jeder andern Stunde m wieder eintreffen? Der Stundenweiser ist der Both A, der Minutenweiser der Both B. Weil jener in 12 Stunden, dieser aber in einer Stunde das ganze Zifferblatt durchläuft, so läuft B zwölfmal so geschwind als A. A hat aber 60 Minuten voraus. Diese muß B durchlaufen, und noch dazu jenen Raum, um welchen A indessen fortgerückt ist. x bedeutet die Minuten des Zifferblatts.

$a = 60$ Minuten
$b = 1$
$c = 12$

x oder $d = \frac{ab}{c-b} = \frac{60 \times 1}{12-1} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ Minuten rücket also der Stundenzeiger von XII an vorwärts, bis ihn der Minutenzeiger wieder einholt. Also nach zwölf Uhr kommen beyde Zeiger wieder übereinander

nach I + $5\frac{5}{11}$
Minuten II + $10\frac{10}{11}$
III + $16\frac{4}{11}$
IIII + $21\frac{9}{11}$
V + $27\frac{3}{11}$
VI + $32\frac{8}{11}$
VII + $38\frac{2}{11}$
VIII + $43\frac{7}{11}$
IX + $49\frac{1}{11}$
X + $54\frac{6}{11}$
XI + 60 oder XII Uhr.

153. Es

153. Es soll Jemand über 3 Jahre 460 fl. bezahlen. Aber er will jetzt gleich bezahlen. Wie viel muß er jetzt geben? $= x$

Es ist klar, daß er jetzt nicht so viel bezahlen darf, weil man das, was er heimbezahlt, auf Interresse legen kann. Es muß das heimbezahlte Kapital sammt dem Interresse, das es in drey Jahren abwirft, gerade 460 fl. ausmachen.

fl. Zins fl.
100 : 5 : : x $\frac{5x}{100} = \frac{x}{20}$. Also in 3 Jahren $\frac{3x}{20}$. Also $x + \frac{x}{20} \times 3 = 460$

$$20x + 3x = 460 \times 20.$$

$$23x = 460 \times 20 \,.\, x = 400$$

Und diese 400 fl. tragen in 3 Jahren 60 fl. Interresse.

Einer hat ein Kapital zu 5 Procent ausgelegt. Nach einem Jahre betragen Kapital und Interresse zusammen gerade 100 fl. Wie groß war das Kapital? $= x$

Der Zins ist wieder $\frac{x}{20}$ wie oben. Also

$$x + \frac{x}{20} = 100$$

$$21x = 2000$$

$$x = \frac{2000}{21} = 95\tfrac{5}{21} \text{ fl.}$$

154. Der

154. Der König Hiero gab einem Künstler einen Centner Gold, damit er daraus eine Krone für den Jupiter verfertigen sollte. Dieser bracht auch eine Krone, die einen Centner wog. Hiero hielt ihn im Verdacht, daß er Silber beygesetzt hätte, und ließ den Archimedes rufen, der ausrechnen sollte, wie viel Gold und Silber die Krone enthielte. Wie ließ sich das bestimmen?

Jeder Körper, wenn er zuerst außer dem Wasser gewogen worden, wiegt weniger, wenn man ihn im Wasser wiegt. Ein schwerer Körper verliert weniger von seinem Gewichte, als ein leichter. Da nun das Gold schwerer ist als das Silber, muß es auch im Wasser weniger von seinem Gewichte verlieren.

Man wäge z. B. ein Pfund Gold, und ein Pfund Silber, die außer dem Wasser gleich schwer sind. Im Wasser wiegt das Gold hin, ob es gleich auch kein Pfund mehr wiegt. Man bemerke sodann, wie viel das Gold, und wie viel das Silber am Gewichte verloren hat. Hieraus kann man berechnen, wie viel ein Centner Gold, und ein Centner Silber im Wasser verlieren. Verliert die Krone, die außer dem Wasser einen Centner wiegt, eben so viel am Gewicht, als ein Centner Gold, so ist sie ganz Gold. Verliert sie eben so viel, als ein Centner Silber, so ist sie ganz Silber. Fällt ihr Verlurst am Gewichte zwischen den Verlurst des Goldes und des Silbers, so ist sie aus Silber und Gold zusammen gesetzt. Man muß also berechnen, wie

viel

viel Gold und Silber dabey ist. Weil die Krone 100 Pfund wiegt, nenne man die Quantität des Goldes, die darinn ist x. Also heißt die Quantität Silber $100 - x$

Wir setzen, der Cent. Gold verliere im Wasser am Gewichte 20, der Cent. Silber 36 Pfund.

	℔	Verlurst		℔	Verlurst
Gold	100 :	20	::	x :	$\frac{20x}{100} = \frac{x}{5}$
Silber	100 :	36	::	$100 - x$:	$= \frac{900 - 9x}{25}.$

Nun setzen wir noch, die Krone verliere 24 ℔. Da aber der Verlurst des in der Krone enthaltenen Goldes $\frac{x}{5}$, des enthaltenen Silbers $\frac{900 - 9x}{25}$ beträgt, muß dieser Verlurst zusammen dem Verlurste der Krone gleich seyn, oder $\frac{x}{5} + \frac{900 - 9x}{25} = 24$, oder $x = 75$. Also waren bey der Krone 75 ℔ Gold, 25 ℔ Silber.

Wären 18 ℔ Gold hergegeben worden, die im Wasser 1 ℔ am Gewichte verlieren, und eben so viel Silber verlöre $\frac{3}{2}$ ℔, und die Krone $\frac{4}{3}$, hieße die Quantität Gold $= x$, Silber $18 - x$, so wäre

	℔	Verl.		℔	Verl.
Gold	18 :	1	::	x :	$\frac{x}{18}$
Silber	18 :	$\frac{3}{2}$	::	$18 - x$:	$\frac{18 - x}{12}$,

$\frac{x}{18} + \frac{18 - x}{12} = \frac{4}{3}$. $x = 6$. Also sind bey der Krone

6 Pfund

6 Pfund Gold, und 12 Pfund Silber. Diese 6 Pf. Gold verlieren im Wasser $\frac{1}{3}$ Pfund, die 12 Pfund Silber, 1 Pfund. Also beyde zusammen verlieren $\frac{4}{3}$, wie die Krone.

155. Ein Wasserkasten hat zwo Röhren, wodurch man das Wasser ablassen kann. Durch die erstere läuft das Wasser in 6, durch die andere in 18 Stunden ab. Oeffnet man beyde zugleich, in wie vielen Stunden wird der Wasserkasten leer? Der Inhalt des Kastens sey a, durch die erste Röhre fließt in 6 Stunden die Quantität a ab, wie viel in den Stunden x? oder

	St.		Quant. Wass.		St.		Quant.
I Röhre	6	:	a	::	x	:	$\frac{ax}{6}$
II Röhre	18	:	a	::	x	:	$\frac{ax}{18}$

$$\frac{ax}{6} + \frac{ax}{18} = a$$

$$3ax + ax = 18a$$

$$4ax = 18a$$

$$4x = 18$$

$x = 4\frac{1}{2}$. Durch eine Röhre fließt ab $\frac{3}{4}$, durch die andere $\frac{1}{4}$ des Wassers.

Ein Wasserkasten wird durch eine Röhre in 12 Stunden gefüllt, und durch die andere in 18 Stunden geleert. Wenn nun der Kasten leer ist, und beyde Röhren geöffnet werden, in wie viel Stunden wird er gefüllt? Die St. seyn x. Weil eine Röhre giebt

giebt, bekömmt die Quantität Wassers, die sie herbeyführt, das Zeichen +, und weil die andere Röhre das Wasser nimmt, bekömmt die Quantität ihres Wassers das Zeichen — (79. a).

	St.		Wasser.		St.		Wasser.
I Röhre	12	:	a	::	x	:	$\frac{ax}{12}$
II Röhre	18	:	a	::	x	:	$\frac{ax}{18}$.

$$\frac{ax}{12} - \frac{ax}{18} = a$$

$$\frac{3ax}{36} - \frac{2ax}{36} = a$$

$$3x - 2x = 36$$

$$x = 36.$$

In 36 Stunden wurde der Kasten durch die erste Röhre dreymal gefüllt, durch die zweyte zweymal geleert. Also bleibt er einmal gefüllt.

156. 130 Ochsen kamen in vier Ställe. So oft in den ersten 2 kommen, kommen in den andern 3, und so nach diesem Verhältniße fort. Wie viele kamen in jeden Stall?

x ist die Anzahl der Ochsen im ersten Stalle

II. Stall $2 : 3 :: x : \frac{3x}{2}$

III. Stall $2 : 3 :: \frac{3x}{2} : \frac{9x}{4}$

IIII. Stall $2 : 3 :: \frac{9x}{4} : \frac{27x}{8}$. Also ist die Gleichung

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{9x}{4} + \frac{27x}{8} = 130 \;.\; x = 16$$

also sind im I. Stalle 16
II. Stalle 24
III. Stalle 36
IIII. Stalle 54

130.

157. Welche Zahl multiplicirt mit 3, oder einem Vielfachen von 3 giebt allzeit drey gleiche Ziffern?

Das hinterste von den drey gleichen Ziffern sey a, so muß das nächste, der Linken zu, seyn 10 a, und das erste hundert a, weil das letzte Ziffer Einheiten, das nächste gegen die Linke Zehner, und das folgende Hunderter gilt. Die drey Ziffern zusammen machen also $100a + 10a, + a = 111\,a$. Das Vielfache von 3 heiße b, und die gesuchte Zahl x. Also

$$111\,a = bx$$

$$x = \frac{111\,a}{b}.$$

Es sey $a = 1 \,.\, b = 3$. Also $\frac{111}{3} = 37$. Die Zahl ist also 37.

$37 \times 3 = 111 \,.\, 37 \times 6 = 222 \,.\, 37 \times 9 = 333 \,.$
$37 \times 12 = 444$ und s. w.

Auf die nemliche Art wird folgende Aufgabe aufgelöst. Auf einer Rechentafel ist eine Addition gemacht worden. Von den angeschriebenen Ziffern sind 3 gleiche weggewischt worden, und es steht nur noch folgendes angeschrieben:

* *

* 6

* bedeutet die weggelöschten Ziffern. Was waren dieß für Ziffern? Die Ziffer heiße x. Also

$$\begin{array}{l} 10x + x \\ 10x + 6 \\ \hline 21x + 6 = 48 \\ 21x = 42 \\ \quad x = 2 \text{ denn } \begin{array}{r} 22 \\ \underline{26} \\ 48 \end{array} \end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Auflösung der Aufgaben mit zwoen unbekannten Größen.

158. Oft kömmt nicht nur eine, sondern zwo, oder mehrere unbekannte Größen vor, wovon eine die andere nicht bestimmt, außer man mache eine neue Gleichung. Wir müssen also auch solche Aufgaben auflösen lernen.

Weil man Aufgaben mit einer unbekannten Größe schon auflösen kann, wäre es wohl zu wünschen, daß man von den Unbekannten alle bis auf eine wegbringen könnte; denn alsdann hätte man nur eine Aufgabe mit einer Unbekannten noch aufzulösen. Und darauf kömmt es auch bey Auflösung solcher Aufgaben an, daß man alle Unbekannte bis auf eine wegbringe. Zu diesem Ende verfährt man also bey zwo unbekannten Größen.

159. I. Man benenne jede unbenannte Größe mit einem der letzten Buchstaben des Alphabets.

II. Man drücke jede Bedingniß der Aufgabe algebraisch aus (§. 137. b). Man wird also, weil zwo unbekannte Größen da sind, auch zwo Gleichungen erhalten,

III. Dann suche man aus jeder Gleichung den Werth der nemlichen Unbekannten, z. B. den Werth von x. Aus diesen zween Werthen, die einander gleich sind, mache man eine neue Gleichung, in welcher nur eine unbekannte, y, noch vorkommen wird, und die sich, wie andere Gleichungen mit einer unbekannten Größe auflösen läßt. Setzt man nun den gefundenen Werth von y an die Stelle von y in einem der beyden Werthe von x, so bekömmt man auch dieses in lauter bekannten Größen. Ich will diese Regel durch ein Beyspiel erläutern. Es sey die Aufgabe, die wir schon §. 138 mit einer unbekannten Größe aufgelöst haben.

Ein Vater ist 30 Jahre älter, als sein Sohn, und beyde zusammen seyn 100 Jahre alt.

Alter des Vaters, x
Alter des Sohnes, y

Die erste Bedingniß ist, der Vater und Sohn sind zusammen alt $100 = a$, oder

$$x + y = a$$

Die zweyte Bedingniß ist, der Vater ist 30 Jahre $= d$, älter als der Sohn, oder

$$x - y = d$$

Aus

Aus beyden Gleichungen suche man den Werth von x

$x + y = a \qquad x - y = d$
$x = a - y \qquad x = d + y.$

Diese zween Werthe setze man einander gleich.

$$a - y = d + y$$
$$a = d + 2y$$
$$a - d = 2y$$
$$\frac{a - d}{2} = y$$

Man hat also jetzt den Werth von y in lauter bekannten Grössen. Setzt man diesen für y in einem der Werthe von x, so bekömmt man auch diesen eben so.

$$x = a - y = a - \frac{a - d}{2} = \frac{2a - a + d}{2} = \frac{a + d}{2},$$

oder

$$x = d + y = d + \frac{a - d}{2} = \frac{2d + a - d}{2} = \frac{a + d}{2}.$$

a) Diese Art, eine unbekannte Grösse auszumärzen, geschieht also **durch die Gleichheit der Werthe dieser Grösse.**

160. Man kann eine unbekannte Grösse auch verschwinden machen **durch die Substitution.** Nemlich man suchet aus einer Gleichung den Werth einer unbekannten, z. B. der Grösse x, und setzt in der andern Gleichung an die Stelle des x den gefundenen Werth. Es seyn z. B. die nemlichen Gleichungen des vorhergehenden §.

$x + y = a \qquad x - y = d$
$x = a - y$

 Diesen

Diesen Werth $a - y$ setze in der zweyten Gleichung statt y, und sie wird

$$a - y - y = d$$
$$a - 2y = d$$
$$a - d = 2y$$
$$\frac{a - d}{2} = y.$$

Den Werth von x findet man hernach, wie schon gezeigt worden.

161. Man kann eine unbekannte Größe auch durch die Addition, oder Subtraction ausmärzen, indem man entweder die zwo Gleichungen zusammen addirt, oder voneinander subtrahirt. Es seyn die alten Gleichungen:

$$x + y = a$$
$$x - y = d$$

Man addire beyde, so bekömmt man $2x = a + d$, und $x = \frac{a + d}{2}$, wie oben. Oder man subtrahire eine von der andern.

$$x + y = a$$
$$x - y = d.$$

Mit veränderten Zeichen wegen der Subtraction.

$$-x + y = -d$$
$$2y = a - d$$
$$y = \frac{a - d}{2}, \text{ wie oben.}$$

162. Man kann endlich eine unbekannte ausmärzen, wenn man mit dem Coefficienten von x in der ersten Gleichung alle Glieder der zweyten, und mit dem Coefficienten von x in der zweyten Gleichung alle Glieder

der ersten multiplicirt, und dann eine Gleichung von der andern abzieht. Z. B.

$$5x+2y=23 \qquad 2x+6y=30$$

$$\times 2,\ 10x+4y=46 \qquad \times 5.\ 10x+30y=150$$

$$\begin{array}{r} 10x+30y=150 \\ -10x-4y=-46 \\ \hline 26y=104. \\ y=4. \end{array}$$

Man kann eine Methode gebrauchen, welche man will. Die erste scheint mir die leichteste, und für Anfänger die einfachste, und faßlichste zu seyn.

Aufgaben.

163. Petrus sagt zum Paulus: Giebst du mir einen Gulden von deinem Gelde, so habe ich so viel, als du. Paulus antwortet: Giebst du mir einen von den deinigen, so habe ich noch so viel, als du. Wie viel hat jeder?

Petrus x
Paulus y.

$$x+1=y-1 \qquad x-1=\frac{y+1}{2}$$

$$x=y-2 \qquad 2x-2=y+1$$

$$2x=y+3$$

$$x=\frac{y+3}{2}$$

$$y-2=\frac{y+3}{2}$$

$$2y-4=y+3$$

$$y-4=3$$

$y=7.$ Folglich $x=y-2=7-2=5.$

$$5+1=7-1. \qquad 5-1=\frac{7+1}{2}$$

 164. All-

164. Allgemein.

Was sie einander geben, heiße a.

$$x + a = y - a \qquad x - a = \frac{y + a}{2}$$

$$x = y - 2a$$

$$2x - 2a = y + a$$

$$2x = y + 3a$$

$$x = \frac{y + 3a}{2}$$

$$y - 2a = \frac{y + 3a}{2}$$

$$2y - 4a = y + 3a$$

$$y = 7a.$$

$$x = 5a$$

Wenn man also das, was sie einander geben, mit 5, und 7 multiplicirt, erhält man für alle Fälle, was ein jeder hat. Z. B. Sie geben sich 27, und die zwo Bedingniße der Aufgaben bleiben, so ist $x = 27 \times 5 = 135$, und $y = 27 \times 7 = 189$. Nun ist $135 + 27 = 162 = 189 - 27$, und $135 - 27 = 108$, $108 \times 2 = 216 = 189 + 27$.

Noch allgemeiner. Wir haben in der Aufgabe angenommen, daß Paulus noch so viel bekomme, wenn ihm Petrus 1 oder a giebt. Man kann aber auch nach Belieben bestimmen, wie vielmal er mehr bekommen soll, drey, vier -- m mal.

$$x + a = y - a \qquad x - a = \frac{y + a}{m}$$

$$x = y - 2a$$

$$mx - am = y + a$$

$$mx = y + a + am$$

$$x = \frac{y + a + am}{m}$$

y —

$$y - 2a = \frac{y + a + am}{m}$$

$$my - 2am = y + a + am$$
$$my - y = 3am + a$$

$$y = \frac{3am + a}{m - 1}$$

$$x = \frac{am + 3a}{m - 1}$$

Z. B. $a = 6$
$b = 3$
So ist $y = 30$, $x = 18$. $30 - 6 = 18 + 6$
$30 + 6 = 12 \times 3$.

165. Man kauft 3 ℔ Caffee, und 5 ℔ Zucker um 5 fl., oder 300 kr., und wieder 4 ℔ Caffe, und 7 ℔ Zucker um 6 fl. 52 kr. oder 412 kr.
1 ℔ Caffee x
1 ℔ Zucker y

$$3x + 5y = 300. \qquad 4x + 7y = 412$$
$$x = \frac{300 - 5y}{3} \qquad x = \frac{412 - 7y}{4}$$

$$\frac{300 - 5y}{3} = \frac{412 - 7y}{4}$$

$$y = 36$$
$$x = 40.$$

166. Zwo Zahlen zu finden, daß, wenn man zum dritten Theil der größern x den halben Theil der kleinern y addirt, 8 herauskommen. Zieht man aber

 vom

vom fünften Theile der größern den dritten der kleinern ab, muß der Rest 1 seyn.

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8$ $\qquad$ $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$

$x = \frac{48 - 3y}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{15 + 5y}{3}$

$$\frac{48 - 3y}{2} = \frac{15 + 5y}{3}$$

$$y = 6, x = 15 . 5 + 3 = 8, 3 - 2 = 1$$

167. Ein Knab will Aepfel und Birnen kaufen, zusammen 100 Stück für 19 kr. 10 Aepfel kosten 2, 25 Birn 4 kr. Wie viel Aepfel und Birnen wird er bekommen? Die Zahl der

Aepfel x

Birnen y.

Aepf. kr. Aepf.

$$10 : 2 :: x : \frac{x}{5}$$

Birnen

$$25 : 4 :: y : \frac{4y}{25}$$

$x + y = 100.$ $\qquad$ $\frac{x}{5} + \frac{4y}{25} = 19$

$$100 - y = 19 \times 5 - \frac{4y}{y}$$

$x = 75.$ Werth der Aepfel $= 15$ kr.

$y = \frac{25.}{100}$ Werth der Birnen $= \frac{4 \text{ kr.}}{19 \text{ kr.}}$

168. Ein

168. Ein Goldschmied kaufte 3 Unzen Gold, und 5 Unzen Silber für 318 fl., und 5 Unzen Gold, und 7 Unzen Silber für 522 fl. Was kostet die Unze Gold (x), und die Unze Silber (y)?

$3x + 5y = 318 \qquad 5x + 7y = 522$

$x = \frac{318 - 5y}{3} \qquad x = \frac{522 - 7y}{5}$

$$\frac{318 - 5y}{3} = \frac{522 - 7y}{5}$$

$$y = 6, \; x = 96.$$

Mehrere Aufgaben zur Uebung wird man §. 149. finden, wenn man statt einer zwo unbekannte Größen annimmt.

Vierter Abschnitt.

Auflösung der Gleichungen von mehr als zwo unbekannten Größen.

169. Es kommen selten mehr, als 3 unbekannte Größen vor. Ich will also nur von Auflösung der Gleichungen mit 3 unbekannten reden. Man wird hieraus leicht abnehmen können, wie man Gleichungen mit mehrern aufzulösen hat.

Sind in einer Aufgabe drey unbekannte Größen, so muß sie auch eben so viele Bedingnisse in sich halten, damit man dreyerley Gleichungen machen könne. Es seyn die drey unbekannten Größen x, y, z. Die Auflösung geschieht so:

Regel:

Regel: Suche aus einer Gleichung den Werth, z. B. von y, aus der andern den Werth von z, und diese zween Werthe setze in der dritten Gleichung für y und z. So wird in dieser nur die unbekannte z allein mehr vorkommen, deren Werth man auf die gewöhnliche Art findet, und aus diesem die Werthe von y und z. Z. B. Die drey Gleichungen seyn

$$x + y = a. \quad x + z = b. \quad y + z = c$$

$$y = a - x \quad z = b - x.$$

$$a - x + b - x = c$$

$$a + b - 2x = c$$

$$\frac{a + b - c}{2} = x$$

$$y = a - \frac{a - b + c}{2}$$

$$y = \frac{a - b + c}{2}$$

$$z = \frac{b - a + c}{2}$$

Aufgaben.

170. A und B haben 10, A und C 11, B und C 9 fl. verspielt. Wie viel jeder?

A hat verspielt x

B y

C z.

$x+y=10=a.\ x+z=11=b.\ y+z=9=c$

$$x=\frac{a+b-c}{2}=\frac{10+11-9}{2}=\tfrac{12}{2}=6$$

$$y=\frac{a-b+c}{2}=\frac{10-11+9}{2}=\tfrac{8}{2}=4$$

$$z=\frac{b-a+c}{2}=\frac{11-10+9}{2}=\tfrac{10}{2}=5.$$ Es ist aber $6+4=10.\ 6+5=11.\ 5+4=9.$

171. Einer kaufte drey Pferde. Der Werth des ersten mit dem halben Werthe der zwey übrigen war 25, der Werth des zweyten mit dem drittl Werthe der zwey übrigen war 26, der Werth des dritten mit dem halben Werthe der zwey übrigen war 29 Caroline. Wie viel galt jedes? x, y, z seyn die Werthe der Ordnung nach, so sind die Gleichungen:

$$x+\frac{y+z}{2}=25.\quad y+\frac{x+z}{3}=26.\quad z+\frac{x+y}{2}=29.$$

Weil hier in jeder Gleichung alle drey unbekannte vorkommen, muß man anders zu Werke gehen. Nemlich man suchet zuerst aus allen drey Gleichungen den Werth von x. Darauf setzet man den ersten, und zweyten, und den zweyten und dritten Werth von x einander gleich, und suchet zween Werthe von y. Diese zween Werthe von y einander gleich gesetzt geben endlich den Werth von z, wie man hier sehen kann.

$$x + \frac{y+z}{2} = 25. \quad y + \frac{x+z}{3} = 26.$$

$$z + \frac{x+y}{2} = 29.$$

I. Werth $x = \frac{50 - y - z}{2}$

II. Werth $x = 78 - 3y - z$

III. Werth $x = 58 - 2z - y$

I. und II. Werth $\frac{50 - y - z}{2} = 78 - 3y - z.$

$$y = \frac{106 - z}{5}$$

II. und III. Werth $78 - 3y - z = 58 - 2z - y$

$$y = \frac{20 + z}{2}$$

$$\frac{106 - z}{5} = \frac{20 + z}{2}$$

$$212 - 2z = 100 + 5z$$

$$112 = 7z.$$

$$z = 16.$$

$$y = \frac{106 - z}{5} = \frac{106 - 16}{5} = 18.$$

$$x = \frac{50 - y - z}{2} = \frac{50 - 18 - 16}{2} = 8.$$

$$8 + \frac{18 + 16}{2} = 25. \quad 18 + \frac{16 + 8}{3} = 26.$$

$$16 + \frac{8 + 18}{2} = 29.$$

172. A, und B, und C spielen miteinander. Im I. Spiele verliert A an jeden der beyden andern so viel, als jeder Geld bey sich hat. Im II. Spiele verliert B an jeden so viel, als jeder jetzt Geld hat. Im III. verliert C an die beyden andern so viel, als jeder Geld hat. Und dann fand sich, daß jeder 24 fl. hatte. Wie viel Geld hatte jeder im Anfange des Spieles?

A hatte x
B y
C z.

Weil am Ende des Spieles jeder 24 fl. hatte, so war die Summe ihres Geldes $24 \times 3 = 72$. Also $x + y + z = 72$.

Das I. Spiel.

A verliert so viel, als B und C zusammen haben. Sie haben aber $72 - x$.
Also nach dem I. Spiele hat A noch $x - 72 + x = 2x - 72$.
B hatte zuvor y, jetzt noch so viel, also $2y$
C hatte zuvor z, jetzt noch so viel, also $2z$.

Das II. Spiel.

B verliert von den $2y$, die er jetzt hat, so viel, als A und C haben. Diese haben aber alles, ohne das Seinige, oder $72 - 2y$. Also bleibt ihm noch $2y - 72 + 2y = 4y - 72$.
A hatte am Ende des ersten Spieles $2x - 72$. Jetzt hat er noch so viel, oder $4x - 144$

C hatte

C hatte am Ende des ersten Spieles $2z$. Jetzt hat er noch so viel, oder $4z$.

Das III. Spiel.

C verliert von seinen $4z$, die er jetzt hat, so viel, als A und B haben. Sie haben alles ohne das Seinige, nemlich $72 - 4z$. Also behält C noch $4z - 72 + 4z = 8z - 72$.

A hatte am Ende des II. Spieles $4x - 144$, jetzt noch so viel, oder $8x - 288$

B hatte am Ende des II. Spieles $4y - 72$, jetzt noch so viel, oder $8y - 144$

Jeder dieser drey Theile betrug 24 fl. Also bekömmt man drey Gleichungen:

$8x - 288 = 24$. $8y - 144 = 24$. $8z - 72 = 24$, und daraus

$x = 39$ $y = 21$ $z = 12$

Nach dem I. Spiele hatte A 6, B 42, C 24.
nach dem II. Spiele hatte A 12, B 12, C 48.
nach dem III. Spiele hatte A 24, B 24, C 24.

173. Zween Bothen A und B gehen von zwoen Städten, die 100 Meilen voneinander liegen, zu gleicher Zeit aus, und einander entgegen. Da sie zusammen kamen, fand A, daß er den Weg von B in $4\frac{1}{2}$ Tagen, B, daß er den Weg von A in $14\frac{2}{9}$ Tagen hätte machen können. In wie viel Tagen kamen sie zusammen? Und wie viele Meilen machte jeder täglich?

Sie

Sie kamen zusammen in den Tagen x
A machte y Meilen,
B machte z Meilen.

A machte in einem Tag y, also machte er in den Tagen x, xy Meilen.

B machte in einem Tag z, also in den Tagen x, xz Meilen.

Die Anzahl der Meilen, die beyde hinterlegten, bis sie zusammentrafen, ist 100, also ist die erste Gleichung $xy + xz = 100$, und $z = \frac{100 - xy}{x}$

Die zwo noch fehlenden Gleichungen, weil drey unbekannten Größen da sind, findet man aus den zwo andern Bedingnissen der Aufgabe. A hat die Meilen y in x Tagen gemacht, und könnte die Meilen z in $4\frac{1}{2}$ Tag machen. Hieraus ergiebt sich folgende Proportion:

	Tag.	M.		Tag.	M.		
A	$4\frac{1}{2}$	: z	::	x	: y	.	$\frac{9}{2} = \frac{xz}{y}$
B	$14\frac{2}{9}$	: y	::	x	: z	.	$\frac{128}{9} = \frac{yx}{z}$.

Man suche nun auch aus diesen zwoen Gleichungen den Werth von z, wie man ihn aus der ersten schon gefunden hat, so bekömmt man $z = \frac{9y}{2x}$, und $z = \frac{9xy}{128}$. Je zween Werthe von z einander gleichgesetzt, giebt folgende zwo Gleichungen, und zween Werthe von x

$$\frac{100 - xy}{x} = \frac{9y}{2x}$$
$$200x - 2x^2y = 9xy$$
$$200 - 2xy = 9y.$$
$$200 - 9y = 2xy$$
$$\frac{200 - 9y}{2y} = x.$$

$$\frac{9y}{2x} = \frac{9xy}{128}$$
$$1152y = 18x^2y$$
$$1152 = 18x^2$$
$$64 = x^2$$

Ist $x^2 = 64$, so ist $x = 8$. Wir haben zwar die Auflösung der Aufgaben des zweyten Grades noch nicht gezeigt. Allein es ist für sich selbst klar, daß gleiche Factoren gleiche Producte, und gleiche Producte mit gleichen Größen dividirt gleiche Quotienten geben. Weil jede Wurzel mit sich selbst multiplicirt ihr Quadrat giebt, so müssen gleiche Wurzeln auch gleiche Quadrate, und umgekehrt gleiche Quadrate gleiche Wurzeln geben, folglich wenn $x^2 = 64$, so ist auch $\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$, und $x = 8$.

Da man jetzt schon eine unbekannte Größe weis, setze man ihren Werth in der Gleichung, worinn y allein vorkömmt $\frac{200 - 9y}{2y} = 8$, so findt man $y = 8$, und endlich $z = 4\frac{1}{2}$.

A gieng also 8 Tage, machte des Tages 8, also in allem 64 Meilen.

B gieng 8 Tage, machte des Tages $4\frac{1}{2}$, also in allem 36 Meilen.

Beyde zusammen 100 Meilen.

Wenn

Wenn A zu 8 Meilen 1 Tag braucht, so braucht es zu den 36 Meilen, die B gemacht hat, $4\frac{1}{2}$ Tag, und wenn B zu $4\frac{1}{2}$ Meilen 1 Tag braucht, so brauchte es zu den 64 Meilen, die A gemacht hat $14\frac{2}{9}$ Tage.

Fünfter Abschnitt.

Von den unbestimmten Aufgaben.

174. Wenn aus einer Aufgabe sich so viele verschiedne Gleichungen ableiten lassen, als unbekannte Größen da sind, so heißt sie eine bestimmte Aufgabe. Von dieser Art waren alle, die wir bisher angeführt haben. Sind aber nach den Bedingnissen der Aufgabe nicht so viele Gleichungen möglich, als unbekannte Größen da sind, so ist die Aufgabe unbestimmt, oder es läßt sich kein bestimmter Werth angeben, der nur allein den Bedingnissen der Aufgabe genug thäte, sondern man kann den unbekannten Größen oft mehrere, manchmal gar unendlich viele Werthe geben, die alle den Bedingnissen der Aufgabe genug thun.

Z. B. Man soll zwo Zahlen finden, die miteinander 8 ausmachen, und um 2 voneinander verschieden sind. Dieß ist eine bestimmte Aufgabe, weil sie zwo unbekannte Größen hat, und zwo Bedingnisse, wovon die erste die Gleichung $x + y = 8$, und die zweyte die Gleichung $x - y = 2$ giebt. Hingegen die Aufgabe, zwo Zahlen zu finden, die miteinander 8 ausmachen, ist eine unbestimmte Aufgabe; denn es sind zwo unbekannte Größen, und nur eine Bedingniß da.

Es läßt sich nur die einzige Gleichung machen $x+y=8$, und folglich $x=8-y$. Für y erhält man keinen bestimmten Werth. Nachdem man nun für y willkührlich einen Werth annimmt, wird daraus auch x bestimmt. Weil ich nun für y alle mögliche ganze, gebrochene, negative und positive Zahlen annehmen kann, hat diese Aufgabe unendlich viele Auflösungen. In ganzen Zahlen, wenn beyde x, und y positiv seyn sollen, sind nur folgende Auflösungen möglich, nemlich

$x=1$, $y=7$ addirt giebt 8
$x=2$, $y=6$ - - - 8
$x=3$, $y=5$ - - - 8
$x=4$, $y=4$ - - - 8
$x=5$, $y=3$ - - - 8
$x=6$, $y=2$ - - - 8
$x=7$, $y=1$ - - - 8.

175. Solche Aufgaben werden aufgelöst, wenn man so viele Gleichungen macht, als möglich sind, und so viele Unbekannte ausmärzt, als man kann. Für die noch übrigbleibenden Unbekannten setzet man gleichwohl nach Willkühr einen Werth, der aber den Bedingnissen der Aufgabe nicht wiedersprechen darf, welches allein aus sorgfältiger Erwegung der Aufgabe abzunehmen ist. Z. B.

Drey Zahlen sollen einerley Differenz haben, und zusammen 105 ausmachen.

Die Zahlen sind x, y, z.

Erste

Erste Bedingniß, $x+y+z=105$.

Folglich $x=105-y-z$.

Zweyte Bedingniß, $x-y=y-z$.

Folglich $x=2y-z$

$$105-y-z=2y-z$$
$$105-z=3y-z$$
$$105=3y$$
$$\frac{105}{3}=y=35.$$

Setze ich diesen Werth in den beyden Werthen von x, so erhalte ich $x=105-35-z$, und $x=70-z$

$$105-35-z=70-z$$
$$70-z=70-z$$
$$0=0$$

Daraus weis ich also noch nicht, was z gilt. Ich muß also für z willkührlich einen Werth annehmen. Weil die mittere Zahl $y=35$, und $105-35=70$, und 70 die Summe der zwo noch fehlenden Zahlen seyn muß; darf ich für z, die kleinere Zahl, alle ganze Zahlen unter 35 annehmen, woraus sich alle correspondierende für x oder 35 bis auf 70 selbst ergeben. Kehre ich es um, daß z die größere, x die kleinere Zahl seyn soll, zwischen welchen y die mittere ist, so bekomme ich eben so viele Auflösungen, als zuvor. Da nun unter 70, 69 Zahlen sind, giebt es 69 Auflösungen in ganzen positiven Zahlen. Nähme man auch Brüche, oder negative Zahlen für z, so erhielte man unendlich viele Auflösungen.

176. So lange man nur mit unbenannten Zahlen rechnet, liegt nicht viel daran, welche Zahlen für die unbekannten Größen gewählt werden, wenn sie nur übrigens den Bedingnissen der Aufgabe genugthun; denn wenn gleich Brüche heraus kommen, so hat das nichts zu bedeuten. Aber wenn die Zahlen benannt sind, wenn sie z. B. Menschen, oder sonst etwas untheilbares bedeuten, dann darf man nur solche Zahlen wählen, die in der Auflösung keine Brüche geben, ob sie gleich sonst in unbenannten Zahlen den Bedingnissen der Aufgabe genug thäten.

Z. B. Es sollen 153 fl. in lauter ganzen Carolinen und Ducaten bezahlt werden, die Carolin zu 11, den Ducaten zu 5 fl. x Caroline, y Ducaten.

$$x + y = 153, \text{ und } x = 153 - y$$

Man sieht wohl, daß für y, Ducaten, nur so eine Zahl gewählt werden durfte, die einen durch 11 theilbaren Rest giebt, und da 13 Caroline schon 143 fl. machen wozu 2 Ducaten = 10 fl. addirt 153 fl. giebt, kann man nicht weniger für y, als 2 annehmen.

Also $y = 2$, $x = 13$. I. Auflösung.

Wie mehr Ducaten genommen werden, desto weniger Caroline kommen dazu, und weil 11 Ducaten 5 Caroline machen, sind nur so viele Auflösungen möglich, so oft man 5 Caroline von den 13 subtrahiren kann. Dafür muß man aber allzeit zu den Ducaten 11 addiren.

y = 2

$$y = 2 \quad , \quad x = 13$$
$$+ 11 \qquad\qquad - 5$$

13 Duc.   8 Carol.   II. Auflösung.

$$11 \qquad\qquad - 5$$

24 Duc.   3 Carol.   III. Auflösung.

Man darf also für y nur die Werthe 2, 13, 24 annehmen, alle andere sind unbrauchbar.

177. Einen Bruch von der Eigenschaft zu finden, daß, wenn man ihn mit einer gegebenen Zahl a multiplicirt, eine andere gegebene Zahl b heraus komme.

Der Bruch sey $\frac{x}{y}$

$$a \times \frac{x}{y} = b$$

$$x = \frac{by}{a} = b \times \frac{y}{a}$$

Man muß also für y, das durch die Aufgabe selbst nicht bestimmt ist, so einen Werth annehmen, der sich durch a ohne Rest dividiren läßt; sonst käme ein neuer Bruch heraus. Z. B. $a = 4$, $b = 6$, $y = 8$. Also $b \times \frac{y}{a} = 6 \times \frac{8}{4} = 12$. Also auch $\frac{x}{y} = \frac{12}{8}$, und $\frac{12}{8} \times 4 = 6 = b$. Oder $a = 4$, $b = 2$, $y = 8$, $\frac{x}{y} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

178. Es kauft Jemand Hämmel, und Schafe, den Hammel für 3, das Schaf für 2 fl. Er bezahlt

für alle Stücke 18 fl. zusammen. Wie viel sind es Hämmel, und Schafe?

Hämmel x

Schafe y

$$3x + 2y = 18$$
$$3x = 18 - 2y$$
$$x = 6 - \tfrac{2}{3}y$$

y ist also unbestimmt; ich kann aber nur eine solche Zahl dafür annehmen, die sich durch 3 ohne Rest dividiren, und der Quotient davon doppelt genommen von 6 subtrahiren läßt.

Man probire 3 selbst. $6 - \frac{2 \times 3}{3} = 4 = x.$

4 Hämmel = 12
3 Schafe = 6
18 fl.

Weil immer 2 Hämmel so viel gelten, als 3 Schafe, so giebt es so viele Auflösungen, als ich von 4 Hämmeln 2 subtrahiren kann. Nur muß ich alsdann zu den Schafen immer 3 dafür addiren. Das geht aber nur einmal, und es sind sodann 2 Hämmel = 6 fl. 6 Schafe = 12 fl. Wenn ich 2 Hämmel nochmal wegnähme, bliebe gegen die Bedingniß der Aufgabe gar keiner mehr übrig.

179. Es kauft Jemand Hämmel = x, und Schafe y. Einen Hammel um 5, ein Schaf um 4 fl. Für alle Stücke zusammen bezahlt er 48 fl. Wie viel waren es Hämmel, und Schafe?

$$5x + 4y = 48$$
$$5x = 48 - 4y$$
$$x = \frac{48 - 4y}{5}$$

Weil keine Zahl mit 5 ohne Rest dividirt werden kann, als die am Ende eine Nulle, oder 5 hat, so muß für y eine Zahl genommen werden, deren Vielfaches von 48 abgezogen am Ende des Restes 5, oder o läßt. Man nehme für y, 2 . $4y = 8$. $\frac{48 - 8}{5} = \frac{40}{5} = 8 = x$.

8 Hämmel, 2 Schafe.

Und weil 4 Hämmel so viel gelten, als 5 Schafe, subtrahire man 4 Hämmel, und addire 5 Schafe, so hat man noch eine Auflösung, nemlich 4 Hämmel, 7 Schafe.

180. Man finde zwo Zahlen. Eine zum Quadrat der andern addirt soll eine Quadratzahl geben, deren Wurzel der Summe eben dieser Zahlen gleich ist. Die Zahlen seyn x, y.

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2.$$
$$y = 2xy + y^2.$$
$$1 = 2x + y.$$
$$1 - 2x = y, \quad \frac{1 - y}{2} = x.$$

Will man für y und x positive Werthe haben, so müssen beyde Brüche seyn, weil sie von 1 abgezogen werden.

Es sey $x = \frac{1}{6}$. Also $1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Nun ist $x^2+y=\frac{1}{36}+\frac{2}{3}=\frac{1}{36}+\frac{24}{36}=\frac{25}{36}$. Die Wurzel davon $=\frac{5}{6}$. Es ist aber $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$.

Diese Aufgabe läßt sich unendlichmal auflösen, weil ich unendlich viele Brüche für x setzen kann.

181. Etliche Manns- und Weibspersonen verzehren 56 kr. Ein Mann zahlt 7, eine Weibsperson 5 kr. Wie viele Männer x, wie viele Weibspersonen y, waren es?

$$7x+5y=56$$
$$7x=56-5y$$
$$x=\frac{56-5y}{7}=8-\frac{5y}{7}.$$

Hier läßt sich für y keine andere Zahl, als 7 annehmen; denn jede andere Zahl gäbe entweder einen negativen Werth von x, oder einen Bruch, wovon keines nach der Bedingniß der Aufgabe seyn darf. Also waren es 7 Weibspersonen, und 3 Mannspersonen, und bezahlten $35+21=56$ kr.

182. Manchmal ist die Auflösung unmöglich, wie, wenn man 25 kr. in lauter Groschen und Sechser bezahlen soll.

Sechser $=y$
Groschen $=x$

$$3x+6y=25$$
$$x=\frac{25-6y}{3}=\frac{25}{3}-2y.$$

Weil hier die Zahl der Sechser y eine ganze Zahl seyn muß, kann niemal eine Zahl heraus kommen, die mit

mit 3 ohne Rest dividirt werden könnte, man mag $y = 1$, oder 2, 3, 4 annehmen.

183. Es soll eine Summe a mit Siebnern, und Siebenzehnern bezahlt werden

Siebner $= x$.

Siebenzehner $= y$

$$7x + 17y = a$$

$$x = \frac{a - 17y}{7}.$$

Wenn ich also 17 y von a abziehe, muß der Rest genau mit 7 theilbar seyn. Weil $7 + 17 = 24$ kann die erste Summe, die sich mit Siebnern und Siebenzehnern bezahlen läßt, nur 24 seyn. $y = 1$. Also $x = \frac{a - 17}{7} = \frac{24 - 17}{7} = \frac{7}{7} = 1$.

a) Folglich lassen sich alle Vielfache von 24, nemlich 48, 72, 96 2c. eben so bezahlen.

b) Unter einem Gulden kann auf diese Art bezahlt werden, 24, 31, 38, 41, 45, 48, 52, 55, 58, 59: welches man durch Versuche findet.

c) 2 Ganze Gulden lassen sich mit Siebnern und Siebenzehnern bezahlen; denn $5 \times 17 = 85$, $5 \times 7 = 35$, und $85 + 35 = 120 = 2$ fl. Eben so lassen sich alle Vielfache von zwey so bezahlen, und so oft a, 2 enthält, so oftmal 5 Siebner, und 5 Siebenzehner braucht man dazu, oder $\frac{5ax + 5ay}{2}$.

d) Auch 3 fl. lassen sich so bezahlen; denn $4y = 4 \times 17 = 68$ und $16x = 16 \times 7 = 112$ und $68 + 112 =$

180

$180 = 3$ fl. Die Formel ist also $16x + 4y = 3$ fl. Folglich $\frac{16x + 4y}{2} = 1$ fl. 30 kr.

e) Wenn man diese Formel mit der ersten zusammen addirt, kann man, von 2 fl. angefangen alle ungerade Gulden bezahlen 3, 5, 7, 9 ꝛc. und durch die erste Formel alle gerade, 2, 4, 6, 8.

184. Kann man einen bloß mit Siebnern bezahlen, und der andere kann nichts, als Siebenzehner heraus geben, oder umgekehrt, so kann man jede Summe von einem Kreuzer an bezahlen; denn $5x - 2y = 35 - 34 = 1$ oder hat A nur Siebner, und B kann nur Siebenzehner heraus geben, und soll 1 Kreuzer bezahlen, so bezahlt A 5 Siebner, und bekömmt 2 Siebenzehner heraus. Oder allgemein: mit der Zahl der Kreuzer, die bezahlt werden sollen $= a$; multiplicire die Formel $5x - 2y$, so hat man allzeit, wie viele Siebner A bezahlen, und wie viele Siebenzehner B heraus geben muß, oder $a = 5ax - 2ay$. Z. B. Es sollen 11 Kreuzer bezahlt werden $= 385 - 374 = 11$.

Hat A lauter Siebenzehner, B lauter Siebner zum heraus geben, weil $5y = 85$, und $12x = 84$, und $85 - 84 = 1$, so darf man nur eine bestimmte Summe a zu bezahlen, $5y - 12x$ mit a multipliciren, und man sieht, wie viele Siebenzehner A bezahlen, und wie viele Siebner B herausgeben muß. Z. B. A soll 11 kr. bezahlen. $935 - 924 = 11$, oder A bezahlt

v+x

bezahlt 55 Siebenzehner, und bekömmt 132 Siebner heraus.

185. Es können auch drey oder mehr unbekannte Größen vorkommen. Ein Metzger kauft Schweine, x, Kälber, y, und Schafe, z um 16 fl. Ein Schwein bezahlt er mit 4, ein Kalb mit 3, ein Schaf mit 2 fl. Wie viele Stücke von jeder Art bekömmt er?

$$4x + 3y + 2z = 16$$

$$x = \frac{16 - 3y - 2z}{4} = 4 - \tfrac{3}{4}y - \frac{z}{2}$$

Weil sonst keine Gleichung möglich, muß man für y, und z selbst Werthe annehmen. Von jeder Art muß ein Stück dabey seyn, die zusammen schon 9 fl. gelten. Es bleiben also nur noch 7 fl. von 16 übrig, die sich in 2 Schafe, und 1 Kalb, oder in ein Schwein, und ein Kalb vertheilen lassen. Er bekömmt also

	Schw.	Kälb.	Schafe.
	1	2	3
oder	2	2	1

186. Ein Einkäufer soll für 100 Stücke 100 fl. bezahlen. Ein Fasan, v, kostet 4 fl. Ein Indian, x, 1 fl. 30 kr., ein Schnepf, y, 30 kr., ein Rebhuhn 15 kr. Wie viel bekömmt er?

$$v + x + y + z = 100$$

$$v = 100 - x - y - z$$

$$240v + 90x + 30y + 15z = 6000 \text{ alles zu Kr. gemacht.}$$

$$v = \frac{2000 - 30x - 10y - 5z}{80} = \frac{400 - 6x - 2y - z}{16}$$

$$100 - x - y - z = \frac{400 - 6x - 2y - z}{16}$$

$$x = \frac{1200 - 14y - 16z}{10} = 120 - \tfrac{7}{5}y - \tfrac{8}{5}z.$$

Weiters läßt sich nichts thun, und y, und z bleiben unbestimmt. Man sieht, daß man für y keine andre Zahl, als 5, oder ein Vielfaches von 5 annehmen darf, sonst gäbe $\frac{7}{5}$ y einen Bruch, das nicht seyn darf. Eben so darf aus der nemlichen Ursache für z nur 2, oder ein Vielfaches von 2 genommen werden.

Es kömmt jetzt zuerst darauf an, die Gränzen zu bestimmen, inner welchen die Werthe von v, x, z, y stehen müssen, wenn beyde Bedingnisse der Aufgabe Platz haben sollen.

v, oder Fasanen dürfen nicht 20 angenommen werden, welche allein schon 80 fl. gälten; denn alsdann fehlten zu 100 Stücken noch 80, und wenn man auch nur 80 Rebhühner, die doch die wohlfeilsten sind, nähme, so machten diese 20 fl. Also wären gegen die Bedingniß der Aufgabe weder Indiane, noch Schnepfen daben.

x, oder Indiane dürfen nicht 57 genommen werden, die schon 85 fl. 30 kr. gälten. Es fehlten alsdann noch

noch 43 Stücke, die 14 fl. 30 kr. gelten müßten. Wenn man dazu auch nur 1 Fasan, 1 Schnepfen, und 12 Rebhühner nähme, machte dieses schon 15 fl.

y, oder Schnepfen, darf man nicht über 80 nehmen; denn wenn ich mehr, als 80 nähme, müßte die nächste Zahl darüber 85 seyn, weil sie ein Vielfaches von 5 seyn muß. Die 85 Schnepfen gelten 42 fl. 30 kr. Es fehlen also noch 57 fl. 30 kr., und 15 Stücke. Nimmt man einen Fasan, 2 Indiane, und 12 Rebhühner, so betragen die nur 10 fl. Nimmt man aber 2 Rebhühner, 1 Indian, und 12 Fasanen, so machen diese nur 50 fl.

z, oder Rebhühner, können nicht über 74 seyn; denn weil der Werth von z ein Vielfaches von 2, oder eine gerade Zahl seyn muß, so wäre die nächste größere 76. Es gelten aber 76 Rebhühner 19 fl. Es fehlen also noch 81 fl., und 24 Stücke. Und wenn ich auch die theuersten, die Fasanen nehme, da sie nicht über 19 seyn dürfen, machten 19 Fasanen 76 fl. Jetzt fehlten noch 5 fl., und 5 Stücke. 4 Indiane, und 1 Schnepf gelten 6 fl. 30 kr. Vier Schnepfen, und 1 Indian 3 fl. 30 kr.

a) Weil 1 Indian, und 4 Rebhühner eben so viel gelten, als 5 Schnepfen, oder 2 fl. 30 kr., so darf man nur von den Schnepfen immer 5 subtrahiren, und dafür 1 Indian, und 4 Rebhühner addiren, und es werden allzeit 100 Stücke von allen vier Arten bleiben, die 100 fl. gelten.

b) Weil

b) Weil 1 Fasan, und 2 Rebhühner, oder 3 Stücke gerade 4 fl. 30 kr. gelten, wie 3 Indiane, darf man nur zur gefundenen Auflösung 1 Fasan, und 2 Rebhühner addiren, und 3 Indiane subtrahiren.

Man nehme jetzt den höchsten Werth von z, und den kleinsten von y, oder 74, 5, so ist $v = 19$, $x = 2$, oder

19 Fasanen, 2 Indiane, 5 Schnepfen, 74 Rebhühner; welches noch eine Veränderung giebt, wenn man 1 Indian, und 4 Rebhühner subtrahirt, und 5 Schnepfen addirt, wie a) gesagt worden.

Nimmt man nach b) von 19 Fasanen, 2 Ind. 5 Schnepf. 74 Rebh. hinweg 1 Fas. 2 Rebh. und addirt 5 Indiane, so erhält man

18 Fas. 5 Ind. 5 Schnepf. 12 Rebhühner.

Dieß giebt nach a) 5 Auflösungen. Nimmt man von dieser letzten hier angesetzten Auflösung das nemliche hinweg, und addirt, wie oben, so erhält man

17 Fas. 8 Ind. 5 Schnepf. 70 Rebhühner

welches nach a) 8 Auflösungen giebt. Eben so findt man

16 Fas.	11 Ind.	5 Schnepf.	68 Rebh.	mit 11 Auflös.
15 Fas.	14 Ind.	5 Schnepf.	66 Rebh.	mit 14 Auflös.
14 Fas.	17 Ind.	5 Schnepf.	64 Rebh.	mit 16 Auflös.
13 Fas.	20 Ind.	5 Schnepf.	62 Rebh.	mit 16 Auflös.
12 Fas.	23 Ind.	5 Schnepf.	60 Rebh.	mit 15 Auflös.
11 Fas.	26 Ind.	5 Schnepf.	58 Rebh.	mit 15 Auflös.
10 Fas.	29 Ind.	5 Schnepf.	56 Rebh.	mit 14 Auflös.
9 Fas.	32 Ind.	5 Schnepf.	54 Rebh.	mit 14 Auflös.

8 Fas.

8	Fas.	35	Ind.	5	Schnepf.	52	Rebh.	mit	13	Auflös.
7	Fas.	38	Ind.	5	Schnepf.	50	Rebh.	mit	13	Auflös.
6	Fas.	41	Ind.	5	Schnepf.	48	Rebh.	mit	12	Auflös.
5	Fas.	44	Ind.	5	Schnepf.	46	Rebh.	mit	12	Auflös.
4	Fas.	47	Ind.	5	Schnepf.	44	Rebh.	mit	11	Auflös.
3	Fas.	50	Ind.	5	Schnepf.	42	Rebh.	mit	11	Auflös.
2	Fas.	53	Ind.	5	Schnepf.	40	Rebh.	mit	10	Auflös.
1	Fas.	56	Ind.	5	Schnepf.	38	Rebh.	mit	10	Auflös.

Es läßt sich also diese Aufgabe 222 mal auflösen.

Nimmt man den höchsten Werth von z und v, und die niedrigsten von x und y zur Grundlage, nemlich 19 Fas. 1 Ind. 5 Schnepf. 74 Rebh. und addirt 18 mal nacheinander dazu
— 1 Fas. + 3 Ind. — 2 Rebh. so bekömmt man alle neunzehn Hauptauflösungen. Addirt man zu jeder Hauptauflösung — 1 Ind. + 5 Schnepf. — 4 Rebh. so oft, bis eine von diesen Größen $= 0$, oder gar negativ wird, so hat man auch alle Nebenabänderungen, die in beyliegender Tabelle vorkommen.

187. 20 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren 20 fl. Ein Mann bezahlt 2, ein Weib 1, ein Kind $\frac{1}{2}$ fl. Wie viele Männer x, Weiber y, Kinder z waren dabey?

$$x + y + z = 20 \qquad 120x + 60y + 30z = 1200$$

$$x = 20 - y - z \qquad x = \frac{1200 - 60y - 30z}{120}$$

$$= 10 - \frac{y}{2} - \frac{z}{4}$$

$$20 - y - z = 10 - \frac{y}{2} - \frac{z}{4}$$

$$80 - 4y - 4z = 40 - 2y - z$$

$$40 - 3z = 2y$$

$$20 - \frac{3z}{2} = y$$

Es muß also für z eine gerade Zahl genommen werden. Es sey $z = 2$, so ist $y = 17$, $x = 1$.
$z = 4$, $y = 14$, $x = 2$
$z = 6$, $y = 11$, $x = 3$
$z = 8$, $y = 8$, $x = 4$
$z = 10$, $y = 5$, $x = 5$
$z = 12$, $y = 2$, $x = 6$. Mehrere Auflösungen sind nicht möglich.

188. Man soll englisch Zinn das ℔ zu 32, gemeines das ℔ zu 24, und Bley das ℔ zu 8 kr. so mischen, daß das ℔ zu 21 kr. heraus komme. Wie viel muß man von jedem nehmen?

Vom englischen Zinn Lothe x
vom gemeinen Zinn — y
vom Bley — z.

Werthe	L.	:	kr.				
engl. Zinn	32	:	32	: :	x	:	x
gem. Zinn	32	:	24	: :	y	:	$\frac{24y}{32} = \frac{3}{4}y$
Bley	32	:	8	: :	z	:	$\frac{8z}{32} = \frac{z}{4}$

$x +$

$$x + y + z = 32 \qquad x + \frac{3y}{4} + \frac{z}{4} = 21$$

$$x = 32 - y - z. \qquad 4x + 3y + z = 84.$$

$$x = \frac{84 - 3y - z}{4}$$

$$32 - y - z = \frac{84 - 3y - z}{4}$$

$$128 - 4y - 4z = 84 - 3y - z.$$

$$44 - 3z = y$$

$$2z - 12 = x$$

Es muß also z größer als 6 angenommen werden; sonst könnte man 12 nicht von 2z abziehen. Es sey also

z =	7	8	9	10	11	12	13	14
y =	23	20	17	14	11	8	5	2
x =	2	4	6	8	10	12	14	16.

Sechster Abschnitt.

Auflösung der bestimmten Aufgaben vom zweyten Grade.

189. Eine Gleichung vom zweyten Grade ist diejenige, worinn die unbekannte Größe zur zweyten Potenz erhoben ist, oder worinn der Exponent der unbekannten Größe 2 ist.

a) Eine Gleichung vom zweyten Grade ist entweder eine reine, oder unreine. Eine reine Gleichung ist, worinn die unbekannte Größe nur in der zweyten Potenz, und nicht auch in der ersten vorkömmt. Es versteht sich aber, daß alle Reductionen schon gemacht worden seyn.

$x^2 = 64$ ist eine reine quadratische Gleichung. Ist die unbekannte Größe auch in der ersten Potenz vorhanden, so ist die Gleichung unrein. Z. B. $x^2 + 6x = 16$. Hingegen scheint $x^2 + 6x = 16x$ nur eine unreine quadratische Gleichung zu seyn, ist aber doch wirklich keine; denn sie kann noch reducirt, oder mit x dividirt werden, so, daß sie nur eine Gleichung vom ersten Grade ist, $x + 6 = 16$.

Es lassen sich nicht alle Gleichungen vom zweyten Grade so auflösen, daß man den Werth der unbekannten Größe genau mit Ziffern ausdrücken könnte, weil gar viele Zahlen nur unvollkommene Quadrate sind (§§. 97. 98.), oder **incommensurable Größen.**

190. **Grundsatz, auf dem die Auflösung aller quadratischen Gleichungen beruhet:** Gleiche Quadrate — oder überhaupt gleiche Potenzen — geben gleiche Wurzeln. Ein Quadrat ist eine Größe, die einmal mit sich selbst multiplicirt worden. Sind nun aus der Multiplication zwoer Größen mit sich selbst gleiche Producte entstanden, so müssen auch diese Größen selbst einander gleich seyn; weil nur gleiche Factoren gleiche Producte geben können, wenn sie mit sich selbst multiplicirt werden.

191. Zur Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung gehört also nichts, als daß man die unbekannte Größe allein auf eine Seite bringe, und die bekannten alle auf die andere Seite, und dann beyderseits die Quadratwurzel ausziehe.

a) Weil

a) Weil sowohl $+a \times +a$, als $-a \times -a$ allzeit ein positives Quadrat $+a^2$ geben, kann man nicht bestimmen, ob von a^2 die Wurzel $+a$, oder $-a$ sey, denn eine, wie die andere thut den Bedingnissen der Aufgabe genug.

b) Also hat jede Aufgabe vom zweyten Grade zweyerley Wurzeln, eine positive, und eine negative. Daher setzt man auch vor das Wurzelzeichen allzeit $\pm$. Es bedeutet also $\pm\sqrt{a^2}$, daß ich die Wurzel a sowohl positiv, als negativ nehmen kann.

c) Aufgaben in bloß unbenannten Zahlen lassen diese zweyfache Auflösung allzeit zu. Allein wenn die unbekannte Größe etwas benanntes ist, kann man meistentheils nur die positive Auflösung brauchen. Z. B. Wenn ich sage: Das Quadrat einer gewissen Anzahl Menschen betrage 36, oder $x^2 = 36$, so ist die Auflösung $x = \pm 6$. Hier ist nur $+6$ brauchbar; denn was sollten -6 Menschen seyn?

192. Aufgabe mit einer reinen quadratischen Gleichung. Einige Kaufleute bestellen einen Factor. Jeder legt zehnmal so viel ein, als es Personen sind. Der Factor gewinnt mit jedem hundert Thaler noch so viel, als es Personen sind.

Wenn man $\frac{1}{100}$ des Gewinnstes mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, so hat man die Anzahl der Kaufleute, x.

Die Einlage ist zehnmal so viel, als es Kaufleute sind, $10x$, und die Einlage aller $10x \times x = 10x^2$. Weil der Factor mit jedem hundert Thaler noch einmal so viel gewinnt, als es Personen sind, gewinnt er $2x$. Wie viel gewinnt er mit der ganzen Einlage?

Thal.	Gew.	Thal.	Gew.
100 :	2x ::	$10x^2$:	$\frac{x^3}{5}$

 Der

Der hunderteste Theil dieses Gewinstes ist $\frac{x^3}{500}$

also $\frac{20}{9} \times \frac{x^3}{500} = \frac{20x^3}{4500} = \frac{2x^3}{450} = \frac{x^3}{225} = x.$

$$x^2 = 225$$
$$x = \pm\sqrt{225}$$
$$x = \pm 15.$$

Hier kann man nur den Werth $+15$ brauchen. Es waren also 15 Kaufleute, jeder legte 150 Thaler, und alle 2250 Thater ein, woraus sich die übrigen Bedingnisse ergeben.

193. Wäre bey unreinen quadratischen Gleichungen auf beyden Seiten ein vollkommnes Quadrat, so dürfte man nur aus beyden Seiten die Wurzel ausziehen, wie §§. 102. 104 gelehrt worden. Alsdann hätte man eine Gleichung vom ersten Grade, die man schon auflösen könnte. Z. Beyspiel $x^2 - 6x + 9 = a^2$. $x - 3 = \pm a$, und $x = 3 \pm a$. Allein dieß ist sehr selten der Fall. Meistentheils fehlet auf einer Seite ein Glied. In diesem Fall muß man das Quadrat ergänzen, das heißt, das hinzusetzen, was zu einem vollkommnem Quadrat noch fehlt. Das nemliche muß man aber auch auf der andern Seite addiren, damit die Gleichheit bleibe (132. II.). Hat man nun auf diese Art ein vollständiges Quadrat erhalten, so nimmt man beyderseits die Wurzel davon, und verfährt hernach, wie ich eben gezeigt habe.

194. Es kömmt also nur darauf an, wie man finden könne, ob die eine Seite der Gleichung ein vollkommnes Quadrat sey, oder was ihr noch fehle, um es zu seyn. Und dieß findt man durch Vergleichung so einer Seite der Gleichung mit einem vollständigen Quadrate.

Wir haben (§. 100.) gezeigt, daß das Quadrat einer zweygliedrigen Größe, $a+b$, oder $a-b$, enthalten müsse, das Quadrat des ersten, und des zweyten Gliedes, und das doppelte Product eines Theiles in den andern, oder $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Um nun mit diesem Quadrat jedes andere, es mag vollständig, oder unvollständig seyn, vergleichen zu können, so richte man es vor allem so ein, daß erstens die unbekannte Größe in der zweyten Potenz von ihrem Coefficienten befreyt werde, wenn sie einen hat, welches geschieht, wenn man alle Glieder der ganzen Gleichung durch denselben dividirt (§. 134. a). Zweytens bringe man alle unbekannte Größen auf eine Seite zusammen, und alle bekannte auf die andere Seite. Z. B.

$$4x^2 + 16 = 5x + 30$$

$$x^2 + 4 = \frac{5x}{4} + 7\tfrac{1}{2}$$

$$x^2 - \frac{5x}{4} = 3\tfrac{1}{2}$$

Es sey nun allgemein die Gleichung $x^2 \pm px = d$ gegeben, und man möchte gerne wissen, ob $x^2 \pm px$ ein vollständiges Quadrat sey. Vergleicht man $x \pm px$ mit $a^2 \pm 2ab + b^2$, so ist $x^2 = a^2$, $\pm px =$

 $+ 2ab$.

$\pm 2ab$. Also fehlt noch eine Größe, die b^2 vorstellte. Wie kann man nun diese finden? Weil $\pm px = \pm 2ab$, und $a = x$, so ist $p = 2b$, und $\frac{p}{2} = b$. Mache ich nun aus $\frac{p}{2}$ das Quadrat, oder $\frac{p^2}{4}$, so ist dieß so viel, als b^2, oder das noch fehlende Quadrat des zweyten Theiles der Wurzel.

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$x^2 \pm px + \frac{p}{4}.$$

Hieraus folgt die allgemeine Regel: **Um ein unvollständiges Quadrat zu ergänzen, nehme man den halben Coefficienten der unbekannten Größe im zweyten Gliede, erhebe ihn zum Quadrat, und addire dieses, so wird das Quadrat vollständig.**

a) Also sind die Regeln zur Auflösung einer Gleichung des zweyten Grades folgende:

I. Man befreye die unbekannte Größe des zweyten Grades von ihrem Coefficienten.

II. Bringe alle unbekannten Größen auf eine, alle bekannten auf die andere Seite.

III. Nehme den halben Coefficienten der unbekannten Größe im zweyten Gliede, und erhebe ihn zum Quadrat.

IIII. Dieses Quadrat addire man auf beyden Seiten.

V. Ziehe

V. Ziehe aus beyden Seiten die Quadratwurzel, und gebe der Wurzel des zweyten Theiles, oder $\frac{p}{2}$ das Zeichen, welches der Coefficient des zweyten Gliedes hatte, dessen halben Theil man zum Quadrate erhoben hat; der Wurzel aus der andern Seite setze man aber die Zeichen $\pm$ vor.

VI. Die daraus gefundene Gleichung des ersten Grades löse man nach den gewöhnlichen Regeln auf.

Beyspiele.

I. $x^2 + 6x = 12$

$$x^2 + 6x + 9 = 12 + 9 = 21$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{21}.$$
$$x = -3 \pm \sqrt{21}.$$

II. $x^2 - 5x = 16$

$$x^2 - 5x + \tfrac{25}{4} = 16 + \tfrac{25}{4} = \tfrac{89}{4}$$
$$x - \tfrac{5}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{89}{4}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{89}.$$
$$x = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{89}.$$

III. $x^2 - 3ax = b$

$$x^2 - 3ax + \tfrac{9}{4}a^2 = b + \tfrac{9}{4}a^2$$
$$x - \tfrac{3}{2}a = \pm\sqrt{b + \tfrac{9}{4}a^2}$$
$$x = \tfrac{3}{2}a \pm \sqrt{b + \tfrac{9}{4}a^2}$$

IIII. $x^2 + ax - bx = c$

$$x^2 + (a - b)x = c$$
$$x^2 + (a - b)x + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$$
$$= c + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$$

$$x + \frac{a-b}{2} = \pm \sqrt{c + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}}$$

$$= \frac{b-a}{2} \pm \sqrt{c + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}}$$

Aufgaben des zweyten Grades.

195. Eine Zahl zu finden, deren Quadrat, und das Sechsfache derselben zusammen 40 ausmachen. Die Zahl sey x. Also

$$x^2 + 6x = 40$$
$$x^2 + 6x + 9 = 49.$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{49} = \pm 7.$$
$$x = -3 \pm 7.$$

Es ist also diese Zahl entweder $-3 + 7 = 4$, oder $-3 - 7 = -10$.
$x = 4.$ $x^2 = 16$, $6x = 24.$ $16 + 24 = 40.$
$x = -10.$ $x^2 = 100$, $6x = -60.$ $100 - 60 = 40.$

Eine Zahl zu finden, deren Quadrat minder der sechsfachen Zahl gleich sey 27.

$x^2 - 6x = 27$
$x^2 - 6x + 9 = 36$
$x - 3 = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$
$x = 3 \pm 6.$ Also 9, oder -3
$x = 9.$ $x^2 = 81.$ $6x = 54.$ Also $81 - 54 = 27.$
$x = 3$, $x^2 = 9.$ $6x = -18.$ Dieses von 9 subtrahirt giebt $9 + 18 = 27.$

Das

Das Quadrat einer Zahl, und ihr Fünffaches sollen 7 ausmachen.

$$x^2+5x=7.$$
$$x^2+5x+\tfrac{25}{4}=7+\tfrac{25}{4}=\tfrac{53}{4}$$
$$x+\tfrac{5}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{53}{4}}$$
$$x=-\tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{53}{4}}$$
$$x^2=\tfrac{25}{4}-5\sqrt{\tfrac{53}{4}}+\tfrac{53}{4}$$
$$5x=-\tfrac{25}{4}+5\sqrt{\tfrac{53}{4}}$$
$$-\tfrac{25}{4}+\tfrac{53}{4}=\tfrac{28}{4}=7.$$

Zwo Zahlen addirt sollen 12, miteinander multiplicirt 35 ausmachen.

Zahlen x, und 12 — x.

$$12x-x^2=35, \text{ oder}$$
$$x^2-12x=-35$$
$$x^2-12x+36=1.$$
$$x-6=\pm 1$$
$$x=6\pm 1=7, \text{ oder } 5. \quad 5+7=12,$$
$$5\times 7, \text{ oder } 7\times 5=35.$$

Zwo Zahlen addirt geben 1, und miteinander multiplicirt 100.

Die Zahlen x und 1 — x

$$x^2-x=100, \text{ oder}$$
$$x-x^2=-100.$$
$$x-x^2+\tfrac{1}{4}=-100+\tfrac{1}{4}$$
$$x-\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{-100+\tfrac{1}{4}}$$
$$x=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{399}{4}}$$

$x=$

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{399}{4}}$$
$$1 - x = \frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{399}{4}}$$
$$\overline{1}$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{399}{4}}$$
$$\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{399}{4}}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{399}{4}}$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{399}{4}} + \frac{399}{4}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{399}{4} = \frac{400}{4} = 100.$$

Es sind zwo Zahlen multiplicirt worden, und ihr Product ist 5544. Es sind aber auf der Rechentafel drey gleiche Zahlen in den mit * bezeichneten Stellen weggelöscht, und man sieht nur mehr

```
 *  2
 *  *
------
 5544
```

Was waren dieß für Zahlen, die da stunden?

Weil sie einander gleich seyn sollen, so heiße die Zahl x. Also nach dem Decimalsystem

$$\begin{array}{c} 10x + 2 \\ 10x + x \\ \hline 5544 \end{array}$$

oder $100x^2 + 20x + 10x^2 + 2x$, oder $110x^2 + 22x = 5544$.

$$x^2 + \frac{x}{5} = \frac{252}{5}$$

$$x^2 + \frac{x}{5} + \frac{1}{100} = \frac{252}{5} + \frac{1}{100} = \frac{5041}{100}$$

$$x + \frac{1}{10} = \pm\sqrt{\frac{5041}{100}} = \pm\frac{71}{10}$$

$$x = -\frac{1}{10} \pm \frac{71}{10} = \frac{70}{10} = 7.$$

Probe

Probe.

$$\begin{array}{r} 77 \\ 72 \\ \hline 154 \\ 539 \\ \hline 5544. \end{array}$$

Die Summe zwoer Zahlen ist 9, und die Differenz ihrer Quadrate auch 9. Die Zahlen seyn x, und y.

$x + y = 9 \qquad x^2 - y^2 = 9$

$x = 9 - y \qquad x^2 = 9 + y^2$

$x^2 = 81 - 18y + y^2$

$y^2 - 18y + 81 = 9 + y^2$

$18y - 81 = -9$

$18y = 72$

$y = \frac{72}{18} = 4$. Also $x = 5$. $4 + 5 = 9$. $25 - 16 = 9$.

Man hat also hier eigentlich nur eine Aufgabe vom ersten Grade aufzulösen.

Das Product zwoer Zahlen ist 20, und die Differenz ihrer Quadrate 9.

$xy = 20 \qquad x^2 - y^2 = 9$

$x = \frac{20}{y}$

$x^2 = \frac{400}{y^2}$

$\frac{400}{y^2} - y^2 = 9$

$$400 - y^4 = 9y^2$$
$$y^4 + 9y^2 = 400$$
$$y^4 + 9y^2 + \tfrac{81}{4} = 400 + \tfrac{81}{4} = \tfrac{1681}{4}$$
$$y^2 + \tfrac{9}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1681}{4}} = \pm\tfrac{41}{2}.$$
$$y^2 = -\tfrac{9}{2} + \tfrac{41}{2} = \tfrac{32}{2} = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16} = 4$$
$$x = \frac{20}{y} = \tfrac{20}{4} = 5. \quad 4 \times 5 = 20.$$

$25 - 16 = 9.$

Auf die nemliche Art wird folgende Aufgabe aufgelöst. Das Product zwoer Zahlen ist 35, die Summe ihrer Quadrate 74. Die Zahlen sind 7, und 5.

Das Product zwoer Zahlen sey allgemein a, ihre Differenz d. Welche sind die Zahlen?

$$xy = a \qquad x - y = d$$
$$x = \frac{a}{y} \qquad x = d + y$$
$$\frac{a}{y} = d + y$$
$$a = dy + y^2$$
$$y^2 + dy = a$$
$$y^2 + dy + \frac{d^2}{4} = a + \frac{d^2}{4}$$
$$y + \frac{d}{2} = \pm\sqrt{a + \frac{d^2}{4}}$$
$$y = -\frac{d}{2} \pm\sqrt{a + \frac{d^2}{4}}$$
$$x = \frac{d}{2} \pm\sqrt{a + \frac{d^2}{4}}$$

Z. B.

Z. B. $a = 40$, $x = 8$, $y = 5$, $5 \times 8 = 40$, $8 - 5 = 3$, oder $x = -5$, $y = -8$. $-5 \times -8 = 40$, und $-5 + 8 = 3$.

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = a.$$

$$\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} = a$$

$$x^2 + 3x = 6a$$

$$x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} = 6a + \tfrac{9}{4}$$

$$x + \tfrac{3}{2} = \pm\sqrt{6a + \tfrac{9}{4}}$$

$$x = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{6a + \tfrac{9}{4}}$$

Es sey $a = 30$, so ist $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2} = 12$ oder -15. Beyde Werthe thun den Bedingnissen genug.

196. Aufgaben in benannten Größen. Ein General hat 5325 Mann, die er gerne in ein vollkommenes Quadrat stellt. Es fehlen ihm aber gerade noch viermal so viel Soldaten, als er gerne in ein Glied stellte. Wie viele kämen in ein Glied?

x. Und das Viereck wäre x^2. Nun fehlen ihm aber $4x$, und das unvollkommene Quadrat ist also $x^2 - 4x$. Also

$$x^2 - 4x = 5325$$

$$x^2 - 4x + 4 = 5329$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{5329} = 73$$

$a = 2 \pm 73$. Weil man hier nur den positiven Werth brauchen kann, ist $x = 75$. $75 \times 65 = 5625$, $5625 - 5325 = 300$, $\frac{300}{75} = 4$.

Einer

Einer wurde gefragt, wie viel er Gulden hätte, und antwortete: Wenn ich zu der Summe noch 5 addire, und dann diese Summe mit meinem Gelde multiplicire, ist das Product 84. Er hat Gulden x.

Folglich $(x+5)\,x = x^2 + 5x = 84$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 84 + \frac{25}{4} = \frac{361}{4}$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{361}{4}} = \pm\frac{19}{2}$$

$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{19}{2} = 7$ oder -12, welches aber hier unbrauchbar ist.

Ein Stück Landes in Gestalt eines Rectangels ist 20 Schuh länger, als breit, und hält 4000 Quadratschuhe. Was für eine Länge und Breite hat es?

Breite $= x$

Länge $= x + 20$

$$x^2 + 20x = 4000$$

$$x^2 + 20x + 100 = 4100$$

$$x + 10 = \pm\sqrt{4100}$$

$$x = -10 \pm \sqrt{4100}$$

$$x = -10 \pm 64{,}03 = 54{,}03.$$

Also ist die Länge 74,03 beynahe, und $54{,}03 \times 74{,}03 = 3999{,}8409$.

Als ich geboren ward, war das Alter meines Vaters 40 Jahre. Multiplicirt man mein gegenwärtiges Alter x mit dem gegenwärtigen Alter meines Vaters, so erhält man das Product 969

Mein Alter x

Das jetzige Alter meines Vaters $40 + x$.

Folglich

$(40+x)$

$$(40+x)x = x^2+40x = 969$$
$$x^2+40x+400 = 1369.$$
$$x+20 = \pm\sqrt{1369} = +37$$
$x = -20+37 = 17$ ist mein Alter.
Das Alter des Vaters $40+17 = 57.$
$57 \times 17 = 969.$

Es kauft Jemand ein Pferd, verkauft es wieder für 119 fl., und gewinnt so viele Procent, als das Pferd ihn überhaupt gekostet hat. Wie theuer war das Pferd?

Werth des Pferdes in Gulden $= x$
Die gewonnene Procente x

Guld.		Procente		Guld.		
100	:	x	: :	x	:	$\frac{x^2}{100}$.

So viel hat er an dem Pferde gewonnen.

Seine Auslage und der Gewinnst zusammen machen 119 fl., um die er das Pferd verkauft hat. Folglich

$$x+\frac{x^2}{100} = 119$$
$$x^2+100x = 11900$$
$$x^2+100x+2500 = 11900+2500 = 14400.$$
$$x+50 = \pm\sqrt{14400} = 120$$
$x = -50+120 = 70$ ist der Ankauf, und der Gewinnst 49 fl.

197. Einer wurde gefragt, was sein Pferd koste, und antwortete, 58 fl. und gerade so viel, als dessen Alter neunmal, und dessen Quadrat dreymal genommen, und noch 4 dazu ausmacht. Wie alt war das Pferd? x

$$3x^2 + 9x + 4 = 58$$
$$3x^2 + 9x = 54$$
$$x^2 + 3x = 18$$
$$x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} = 18 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{81}{4}$$
$$x + \tfrac{3}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{81}{4}} = \tfrac{9}{2}$$
$x = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} = 3$ Jahre war das Pferd alt.

Die Hälfte einer Zahl mit ihrem Drittheil multiplicirt macht 24, oder $\frac{x^2}{6} = 24$. $x^2 = 144$. $x = 12$.

Der Cubus einer Zahl mit dem vierten Theil seiner Wurzel dividirt giebt 100, oder $x^3 : \frac{x}{4} = 100$, oder $\frac{4x^3}{x} = 100$, oder $4x^2 = 100$, $x^2 = 25$, $x = 5$.

198. Ein General wird gefragt, wie viele Hauptleute er unter seinem Regimente habe? Er antwortet: Jeder Hauptmann hat noch so viele Unterhauptleute unter sich, als Hauptleute sind, ein jeder Unterhauptmann viermal so viel Soldaten, als Hauptleute. Jedem Hauptmanne rechne er 9 Soldaten zu seiner Bedienung, welches den $\frac{1}{200}$ Theil aller Soldaten mache. Wie viele Hauptleute, Unterhauptleute, und Soldaten sind es?

Haupt-

Hauptleute x
Unterhauptl. $2x^2$
Soldaten $8x^3$. Jeder Hauptmann hat 9 Soldaten, also alle Hauptleute $9x$ Soldaten. Dieß ist $\frac{1}{200}$ aller Soldaten. Also

$$\frac{8x^3}{200} = 9x, \text{ oder } \frac{x^3}{25} = 9x$$

$$x^2 = 9 \times 25 = 225$$

$$x = 15.$$

15 Hauptleute
450 Unterhauptleute
27000 Soldaten.

Ein Gärtner soll mit einer Anzahl Bäume ein Viereck anlegen. Da blieben ihm 20 übrig. Nun verlängert er jede Reihe um einen Baum, und es gehen ihm 101 Bäume ab. Wie viele hat er?

Es sey die Zahl der Bäume in einer Reihe x, folglich das daraus entstehende Viereck $= x^2$. Er hat also $x^2 + 20$.

Machet er die Reihe $x + 1$, so ist das Viereck $x^2 + 2x + 1$. Allein dazu fehlen ihm 101. Also

$$x^2 + 20 = x^2 + 2x + 1 - 101$$

$$20 = 2x - 100$$

$$120 = 2x$$

$$60 = x$$

Er hat also $60 \times 60 + 20$, oder 3620 Bäume.

40 soll in zween Factoren getheilt werden, wovon einer um 3 größer, als der andere ist.

x

$x+3$. Also

$(x+3)x = x^2 + 3x = 40$

$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 40 + \frac{9}{4} = \frac{169}{4}$

$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{169}{4}} = + \frac{13}{2}$

$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{13}{2} = 5$. Der andere Factor ist $5+3=8$, oder ein Factor ist -5, oder der andere -8, welches auch 40 giebt.

Siebentes Hauptstück.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von den Rationen, Proportionen, und Progressionen.

Einleitung.

199. Zwo Größen können miteinander verglichen, oder nebeneinander hingesetzt werden, um zu sehen, 1. ob eine der andern gleich, 2. ob eine größer, als die andere, 3. wie oft eine in der andern enthalten sey. Das, was man auf diese Art entdeckt, heißt das **Verhältniß**, ratio, der **Größen gegeneinander**. So hat 4 zu 3+1 ein gleiches Verhältniß. Man vergleicht aber meistentheils nur ungleiche Größen miteinander.

Suche ich, wie viel eine Größe kleiner, oder größer als die andere ist, so finde ich ihr **arithmetisches Verhältniß**. Z. B. 5 ist um 2 größer als 3, oder 2 ist um

um 4 kleiner als 6. Suche ich aber, wie oft eine Größe die andere enthalte, oder in der andern enthalten sey, so suche ich ihr **geometrisches Verhältniß.** Z. B. 2 ist in 6 dreymal enthalten, oder 8 enthält 2 viermal.

Die erste von diesen Größen, die mit der andern verglichen wird, nennt man allzeit antecedens, und die zweyte consequens.

Jene Zahl, die ausdrückt, um wie viel eine Größe kleiner, oder größer, als die andere, oder wie oft eine in der andern enthalten ist, oder sie enthalte, drückt eigentlich das Verhältniß beyder Größen aus.

So ist also das arithmetische Verhältniß nichts anders, als die Differenz zwoer Größen, z. B. weil 5 um 2 größer als 3 ist, so ist ihr arithmetisches Verhältniß 2. Das geometrische Verhältniß ist der Quotient, der heraus kömmt, wenn man eine Größe durch die andere dividirt. 2 ist in 6 dreymal enthalten, oder $\frac{6}{2} = 3$. 3 ist also ihr geometrisches Verhältniß, oder drückt ihr Verhältniß aus.

Wenn 2, 3, 4 &c. Paar Größen die nemlichen Differenzen haben, oder den nemlichen Quotienten geben, so sagt man, sie haben ein **gleiches Verhältniß** — habent eamdem rationem. Z. B.

2. 5, 3. 6, 4. 7, 5. 8. Hier ist immer das Consequens um 3 größer, als das Antecedens. Also sind alle diese arithmetische Rationen gleich.

2. 6, 3. 9, 4. 12, 5. 15. Hier ist jedes Antecedens in seinem Consequens dreymal enthalten. Also sind alle diese geometrische Rationen gleich.

200. Erhält man bey zwey, drey, vier, ꝛc. Paaren allzeit die nemliche Differenz, oder den nemlichen Quotus, wenn man das Antecedens vom Consequens subtrahirt, das Antecedens mit dem Consequens dividirt, oder wenn man das Consequens vom Antecedens subtrahirt, das Consequens mit dem Antecedens dividirt, so stehen diese 2, 3, 4 ꝛc. Paare im **geraden Verhältniß**, sunt in ratine directa. Muß man aber, um die nemlichen Differenzen, oder Quotienten zu bekommen bey einem Paar das Antecedens vom Consequens; und beym andern das Consequens vom Antecedens subtrahiren, oder bey einem Paar das Antecedens durchs Consequens, beym andern das Consequens durch das Antecedens dividiren, so stehen diese zwey Paare im **umgekehrten Verhältniß.** Sunt in ratione inuersa, oder reciproca, indirecta.

2. 5, 3. 6 gerades arithmetisches Verhältniß.
2. 5, 6. 3 umgekehrtes arithm. Verhältniß.

2. 6, 3. 9 gerades geomet. Verhältniß.
2. 6, 9. 3 umgekehrtes geomet. Verhältniß.

a) Man kann also aus einem umgekehrten Verhältniß gleich ein gerades machen, wenn man nur die zwo Größen eines Paares versetzt, wie man hier sieht.

b) Oder wenn man die zwo Größen einer Ration wie Brüche schreibt, deren Zähler 1, und die Nenner die Größen selbst sind, wie hier:

2. 6, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$

denn

denn es kömmt überall der nemliche Quotient heraus $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{1} = 3$.

201. Wenn 2 Paar Größen das nemliche gerade Verhältniß zu einander haben, so machen sie eine Proportion aus, die also aus zwo gleichen Rationen besteht.

2. 5, 3. 6 eine arithmet. Proportion
2. 6, 3. 9. eine geomet. Proportion.

Die arithmetische Proportion wird so geschrieben.

2 . 5 : 3 . 6
oder 2 . 5 = 3 . 6
die geomet. 2 : 6 : : 3 : 9
oder 2 : 6 = 3 : 9, wo das Zeichen = nicht die Gleichheit der Größen, sondern der Ration anzeigt.

a) Das erste und letzte Glied zusammen, hier 2 und 6, oder 2 und 9, heißen die extrema, die äußersten Glieder, und die andern zwey die mittern, media.

b) Es kann in einer Proportion das mittere Glied zweymal gesetzt werden. Dann nennt man eine solche Proportion eine stette, continua, da die andere nur discreta ist. Z. B.

2. 5 : 5, 8. stette arithm. Prop.
2. 6 : : 6 : 18. stette geomet. Prop.

c) Bey einer stetten Proportion setzt man das mittere Glied Bequemlichkeit halber nur einmal. Zeigt aber durch ein Zeichen an, daß es zweymal genommen werden soll, und zwar so

bey der arithm. $\div$ 2. 5. 8.
bey der geom. $\because\!\div$ 2 : 6 : 18.

 202. Wenn

202 Wenn mehrere gleiche Paar Rationen, als vier, nacheinander geschrieben werden, so nennet man es eine Reihe proportionirter Größen, series quantitatum proportionalium.

Arithm. 2. 4, 3. 5, 1. 3, 6. 8. 7. 9 2c.

Geom. 2: 4, 3: 6, 4: 8, 1: 2. 6: 12 2c.

Sind aber diese Reihen in einem stetten Verhältniß, d. i. wenn das Consequens der ersten Ration das Antecedens der zweyten, u. s. f. ist, so heißt eine solche Reihe eine Progression.

Arithm. Progressionen. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14 2c.
Geom. Progressionen. 2: 4: 8: 16: 32: 64: 128 2c.
Denn es ist bey der ersten so viel, als wenn ich schreibe:
2. 4: 4. 6: 6. 8: 8. 10: 10: 12: 12: 14 2c.
Bey der zweyten:
2: 4:: 4: 8:: 8: 16:: 16: 32:: 32: 64:: 64: 128 2c.

Zweyter Abschnitt.

Eigenschaften der arithmetischen Rationen, Proportionen und Progressionen.

203. Jede arithmetische Ration läßt sich so ausdrücken: a . a$\pm$d, b . b$\pm$d, c, c$\pm$d.

Denn a kann jedes Ziffer, oder Antecedens ausdrücken, b jedes andere Antecedens, außer a, c jedes andere, außer a und b. Das Consequens einer Ration ist entweder um etwas größer, oder kleiner, das wir d heißen wollen. Folglich wenn im ersten Falle zu a addiert wird d, kömmt das Consequens heraus,

nemlich

nemlich $a+d$, im zweyten wird d von a subtrahiret, und das Consequens ist $a-d$. Jenes gilt für eine wachsende, dieses für eine abnehmende Ration. Also für beyde zugleich $a.\ a\pm d$. Ist ein neues Antecedens b, so wird es eben so bewiesen, daß sein Consequens sey $b\pm d$.

Es sey die Ration 2. 5.
3. 6.

setze ich $2=a$, $3=b$.
$3=d$.
so ist $5=2+3=a+d$
und $6=3+3=b+d$
Die erste Formel ist $a.\ a+d$
Die zweyte $b.\ b+d$.

Es seyn die andere Rationen

$4=a$ 4 . 1. $1=4-3=a-d$
$5=b$ 5 . 2 $2=5-2=b-d$.
$3=d$

a) Also sind die Formeln $a\ .\ a-d$
$b\ .\ b-d$

Was also von diesen Rationen bewiesen wird, gilt von allen möglichen, sie mögen durch was immer für Ziffern ausgedrückt werden, wenn nur alle Rationen die nemliche Differenz d haben.

204. Jede arithmetische Proportion läßt sich durch folgende Formel ausdrücken: $a.\ a\pm d$, $b.\ b\pm d$.

Eine arithmetische Proportion besteht aus zwo gleichen Rationen, welche die nemliche Differenz ha-

 ben

ben (§. 201.). Nun sind $a . a \pm d$, und $b . b \pm d$ solche gleiche Rationen. Also ꝛc. Das Zeichen + gilt bey einer wachsenden, — bey einer abnehmenden Proportion.

205. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittern gleich.

Jede solche Proportion wird ausgedrückt durch $a . a \pm d : b . b \pm d$. Addiere ich das erste Glied a, und das letzte $b \pm d$, so ist die Summe $a + b \pm d$. Addiere ich die zwey mittere $a \pm d$, und b, so ist die Summe $a + b \pm d$. Also beyde gleich.

$2 . 5 : 3 . 6 \quad 2 + 6 = 8, \quad 5 + 3 = 8$

$1 . 2 : 3 . 4 \quad 1 + 4 = 5, \quad 2 + 3 = 5$

$5 . 4 : 3 . 2 \quad 5 + 2 = 7, \quad 4 + 3 = 7$

a) Ist es ein stettes Verhältniß, so ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittern Gliede.

$a . a \pm d : a \pm d . a \pm 2d$ oder

$\div a . a \pm d . a \pm 2d$. Die Summe der äußern Glieder ist $2a \pm 2d$, und das mittere Glied doppelt, $\overline{a \pm d} \times 2 = 2a \pm 2d$.

$2 . 4 : 4 : 6$ oder

$\div 2 . 4 . 6. \quad 6 + 2 = 8$ und $4 \times 2 = 8$

$2 . 6 . 9. \quad 9 + 3 = 12$ und $6 \times 2 = 12$.

b) Wenn also in einer arithmetischen Proportion ein Glied fehlt, kann man es leicht finden. Man setze x an seine Stelle, addiere die äußern, und auch die mittern Glieder, setze die zwo Summen einander gleich, und suche dann aus dieser Gleichung den Werth von x. Es sey die Proportion $3 . 6 : 15 . 18$.

Es

Es fehle das erste Glied. $x. 6 : 15. 18.$

$x + 18 = 21$

$x = 21 - 18 = 3$

Es fehle das zweyte. $3. x : 15. 18.$

$x + 15 = 21$

$x = 21 - 15 = 6$

Es fehle das dritte. $3. 6 : x. 18.$

$x + 6 = 21$

$x = 21 - 6 = 15$

Es fehle das vierte. $3. 6 : 15. x$

$x + 3 = 21$

$x = 21 - 3 = 18.$

Regel. Man addiere die zwey zusammen gehörenden Glieder, und subtrahire das Einzelne davon. Was übrig bleibt ist das gesuchte Glied.

c) Eben so verfährt man mit einer stetten Proportion.

$3. 6 : 6. 9$ oder

$\div 3. 6. 9$

Es fehle das erste Glied.

$x. 6. 9$

$x + 9 = 2 \times 6$, weil das mittere Glied doppelt der Summe der äußern gleich ist.

$x = 12 - 9 = 3$

Es fehle das mittere. $3 + 9 = 2x$

$\frac{12}{2} = x = 6$

Es fehle das letzte. $3. 6. x$

$3 + x = 12$

$x = 12 - 3 = 9$

206. Jede

206. Jede arithmetische Progression läßt sich durch folgende Formel vorstellen ÷ a. a ± d. a ± 2 d. a ± 3 d. a ± 4 d ꝛc.

In jeder Progression ist ein stettes Verhältniß, und das vorhergehende Consequens gilt für das folgende Antecedens. Diese erste Bedingniß ist in dieser Progression. Hernach muß jedes folgende Glied um die Differenz größer, oder kleiner seyn, je nachdem die Progression wachsend, oder abnehmend ist. Auch dieß geschieht, indem jedes folgende Glied um ein d mehr, oder weniger hat, als das vorhergehende.

Was also von dieser Progression erwiesen ist, gilt von allen.

207. In jeder Progression ist die Summe der zwey mittern Glieder, wenn die Zahl gerade ist, oder wenn sie ungerade ist, die doppelte Summe des mittern Gliedes gleich der Summe jeder zwey andern Glieder, die vom, oder von den mittern gleich weit entfernet sind. Jede Progression wird vorgestellt durch

I.	II.	III.	IIII.	V.	VI.	VII.
a.	a ± d.	a ± 2 d.	a ± 3 d.	a ± 4 d.	a ± 5 d.	a ± 6 d.

Hier ist die Zahl ungerade, das mittere Glied ist IIII. Das doppelte davon 2 a ± 6 d. Aber eben diese Summe machen aus I + VII. 2 a ± 6 d. II. + VI. 2 a ± 6 d. III + V 2 a ± 6 d.

Nimmt man nur 6 Glieder, so ist die Summe der mittern III + IIII = 2 a ± 5 d, die Summe von I + VI = 2 a ± 5 d, von II + V = 2 a ± 5 d.

Das

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18.
Das mittere Glied 10 doppelt macht 20. $2+18=20$. $4+16=20$, $6+14=20$. $8+12=20$.

Nimmt man nur acht Glieder, so sind die mittere $8+10=18$. $2+16=18$. $4+14=18$. $6+12=18$.

208. Jedes Glied ist gleich der Summe aus dem ersten, und die Differenz so oft genommen, als Glieder vor diesem sind. Z. B. vor dem siebenten Glied gehen sechs. Also ist das VII Glied gleich $a \pm 6d$, wie der Augenschein zeigt, oder in Zahlen das IX Glied, 18 ist gleich dem ersten 2 + und der Differenz 2 achtmal genommen $= 16$. $16+2=18$.

Wenn also hier IX das letzte Glied ist, so ist der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Gliede gleich der Differenz der Progression multiplicirt mit der Zahl der vorhergehenden Glieder.

$18-2=16=2\times 8$, oder $VII - I = a \pm 6d - a = \pm 6d = 6 \times d$.

a) Heißt das erste Glied a
Das letzte ω
Die Zahl aller Glieder n
Die Differenz d, so ist

$$\omega - a = \overline{n-1} \times d = dn - d.$$

209. Die Summe einer arithmetischen Progression ist gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes mul-

multiplicirt mit der halben Zahl aller Glieder, oder mit der ganzen, das Product mit 2 dividirt.

$a \,.\, a \pm d \,.\, a \pm 2d \,.\, a \pm 3d : a \pm 4d \,.\, a \pm 5d$ ꝛc. Die ganze Summe ist $6a + 15d$. Eben dieses kömmt heraus, wenn ich das erste und letzte Glied addiere $2a \pm 5d$, und diese Summe mit der halben Zahl der Glieder $\frac{6}{2} = 3$, oder mit der ganzen Zahl 6 multiplicire, und das Product mit 2 dividire, entweder $6a \pm 15$, oder $\frac{12a \pm 30d}{2} = 6a \pm 15d$.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17.

$1 + 17 = 18 \,.\, 18 \times \frac{9}{2} = \frac{162}{2} = 81$. Eben dieses wird herauskommen, wenn man alle Zahlen der Progression zusammen addiert.

a) Dieser Lehrsatz wird algebraisch so ausgedrückt:

Das erste Glied	$= a$
Das letzte	$= \omega$
Die Zahl der Glieder	$= n$
Die Summe	$= s$

$$s = (a + \omega) \times \frac{n}{2} = \frac{an + \omega n}{2}.$$

b) In einer Progression kann ein Glied $= 0$ werden. Denn 6. 4. 2. 0. $-$ 2. $-$ 4. $-$ 6. haben alle die nemliche Differenz. Jedes Glied ist um 2 kleiner, als das vorhergehende.

210. Aus den zwo Formeln §. 14. $\omega - a = dn - d$, und §. 15 $s = \frac{an + \omega n}{2}$ lassen sich alle,

und

und zwar sehr wichtige Aufgaben von den arithmetischen Progressionen auflösen.

Man kann fünferley Stücke suchen

Das erste Glied	=	a
Das letzte Glied	=	ω
Die Differenz	=	d
Die Zahl der Glieder	=	n
Die Summe	=	s.

Sobald man drey von diesen weis, lassen sich die übrigen zwey ausrechnen. Man setze nur für das unbekannte Stück x, so findet man es nach der gemeinen Regel von Auflösung der Gleichungen.

Man nehme die erste Formel.

I.

$$\omega - a = dn - d$$

* $$\omega = dn - d + a$$

* * $$a = d - dn + \omega$$

$$d = \frac{\omega - a}{n - 1}$$

* * * $$n = \frac{\omega - a + d}{d} = \frac{\omega - a}{d} + 1.$$

Man nehme die zweyte Formel $\frac{an + \omega n}{2} = s$.

II.

$$s = \frac{an + \omega n}{2}$$

* * $$\frac{2s - \omega n}{n} = a = \frac{2s}{n} - \omega$$

* $$\omega = \frac{2s - an}{n} = \frac{2s}{n} - a$$

* * * $$n = \frac{2s}{a + \omega}$$

Jetzt hat man einmal acht Formeln. Man

Man nehme jetzt den Werth * ω bey I., und setze ihn in der untern Gleichung * für ω bey II., so hat man $a+dn-d=\frac{2s-an}{n}$ oder $2an+dn^2-dn=2s$. Hieraus folgen:

$$s=\frac{2an+dn^2-dn}{2}$$

$$a=\frac{2s-dn^2+dn}{2n}$$

$$d=\frac{2s-2an}{n^2-n}$$

$$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{8ds+\overline{2a-d}^2}}{2d}$$

Man nehme den Werth ** von a bey I., und setze ihn anstatt a in der untern Gleichung bey II., so kömmt

$$\omega-dn+d=\frac{2s}{n}-\omega \text{ oder}$$

$$\omega n-dn^2+dn=2s-\omega n$$

$$2\omega n-dn^2+dn=2s.$$

$$\omega=\frac{2s+dn^2-dn}{2n}$$

$$s=\frac{2\omega n-dn^2+dn}{2}$$

$$d=\frac{2s-2\omega n}{n^2+n}=\frac{2\omega n-2s}{n^2-n}$$

$$n=\frac{d+2\omega\mp\sqrt{-8ds\times\overline{d+2\omega}^2}}{2d}.$$

Man

Man nehme endlich den Werth n^{***} bey I., und setze ihn in der untern Gleichung anstatt n^{***} bey II. und man wird bekommen

$$\frac{\omega - a + d}{d} = \frac{2s}{a + \omega}$$

$$a\omega - a^2 + ad + \omega^2 - a\omega + d\omega = 2ds.$$

$$s = \frac{\omega^2 + d\omega + ad - a^2}{2d}$$

$$a = \frac{d \pm \sqrt{-8ds + \overline{d + 2\omega}^2}}{2}$$

$$\omega = \frac{d \pm \sqrt{8ds + \overline{2a - d}^2}}{2}$$

$$d = \frac{\overline{\omega + a} \times \overline{\omega - a}}{2s - a - \omega}.$$

Ich werde hier alle Formeln in einer bequemern Ordnung vorlegen. Die erste Reihe wird enthalten, was man sucht, die zweyte die drey gegebenen Größen, und die dritte die Formel, sie zu finden.

Man sehe also, so bald eine in die arithmetische Progression einschlagende Aufgabe vorkömmt, nach, 1. was sucht man? 2. welches sind die 3 gegebenen Größen? 3. suche man unter der gesuchten Größe die diese 3 gegebenen Größen enthaltende Formel.

Man sucht	man weis	Formel
a	ω. d. n.	$\omega - d \times \overline{n-1}$
a	ω. n. s.	$\frac{2s}{n} - \omega$
a	d. n. s.	$\frac{s}{n} - \frac{d \times \overline{n-1}}{2}$
a	s. d. ω.	$\frac{d + \sqrt{-8ds + \overline{d+2\omega}^2}}{2}$
ω.	a. d. n.	$a + d \times \overline{n-1}$
ω.	a. n. s.	$\frac{2s}{n} - a$
ω.	d. n. s.	$\frac{s}{n} + \frac{d \times \overline{n-1}}{2}$
ω.	a. d. s.	$\frac{-d \pm \sqrt{8ds + \overline{2ad}^2}}{2}$
d.	a. ω. n.	$\frac{\omega - a}{n-1}$
d.	a. n. s.	$\frac{2s - 2an}{n \times \overline{n-1}}$
d.	ω. n. s.	$\frac{2\omega n - 2s}{n \times \overline{n-1}}$
d.	a. ω. s.	$\frac{(\omega + a) \times (\omega - a)}{2s - a - \omega}$

n.

Man sucht	man weis	Formel.
n.	a. ω. d.	$1 + \frac{\omega - a}{d}$
n.	a. ω. s.	$\frac{2s}{a + \omega}$
n.	a. d. s.	$\frac{d - 2a \pm \sqrt{8ds + \overline{2a - d}^2}}{2d}$
n.	ω. d. s.	$\frac{d + 2\omega \mp \sqrt{-8ds + \overline{d + 2\omega}^2}}{2d}$
s.	a. ω. n.	$\frac{1}{2} n \times \overline{\omega + a}$
s.	a. d. n.	$n \times (a + d \times \frac{n - 1}{2})$
s.	ω. d. n.	$n \times (\omega - d \times \frac{n - 1}{2})$
s.	a. ω. d.	$\frac{\overline{\omega + a} \times \overline{d + \omega - a}}{2d.}$

Aufgaben.

211. Ein Schokolademacher hat siebnerley Sorten, von jeder Sorte ist das Pfund um 10 kr. theurer, als das andere. Das Pfund vom beßten kostet 2 fl. Wie viel kostet der schlechteste?

$\omega = 2$ fl. $= 120$ kr.

$d = 10$ kr.

$n = 7$. a nach der I. Formel $= \omega - d \times \overline{n-1} =$
$120 - 10 \times 6 = 120 - 60 = 1$ fl.

Ein Stein ist 540 Schuhe hoch herabgefallen. Die letzte Secunde machte er 165 Schuhe, und jede Secunde um 30 Schuhe mehr als in der vorhergehenden. Wie viel machte er die erste?

$\omega = 165$

$d = 30$

$s = 540$. IIII. Form. $\frac{d \pm \sqrt{-8ds + \overline{d + 2\omega}^2}}{2}$

$= \frac{30 \pm \sqrt{-129600 + 129600}}{2} = 15$

In sieben Dörfern liegen Soldaten. In jedem liegen 5 Mann mehr, als im vorhergehenden. Im letzten liegen 55. Wie viel im ersten?

$n = 7$

$d = 5$

$\omega = 55$ nach I. Form. $55 - 5 \times 6 = 25$.

Ein Vater hat 5 Kinder, der Werber mißt sie alle, und findt, daß sie zusammen 260 Zoll haben, und je eines um 2 Zoll größer als das andere ist. Wie viel Zoll hat das erste?

$n = 5$

$n = 5$
$d = 2$

$s = 260$ III. Form. $\frac{s}{n} - d \times \overline{\frac{n-1}{2}} = 52 - 2 \times 2$
$= 52 - 4 = 48$ oder 4 Schuhe.

---

6 Arme bekommen 63, der letzte 18 kr. Wie viel der erste?

$n = 6$
$\omega = 18.$ II. Form. $\frac{2s}{n} - \omega = \frac{126}{6} - 18 =$
$s = 63$ $\qquad 21 - 18 = 3$

Wenn einer für einen Brunnen von 60 Schuh zu graben für den ersten Schuh 6 kr. und für jeden der folgenden um 4 kr. mehr bekömmt, wie viel wird ihm für den letzten Schuh bezahlt?

$a = 6$
$d = 4$
$n = 60.$ V. Form. $a + d \times \overline{n - 1} = 6 + 4 \times 59$
$= 236 + 6 = 242.$

Wenn ein Körper mit beschleunigter Bewegung in der ersten Secunde 15 Schuh tief fällt, und in 5 Secunden 375 Schuh. Wie weit fällt er in der letzten Secunde?

$a = 15$
$n = 5$
$s = 375$ VI. Form. $\frac{2s}{n} - a = \frac{750}{5} - 15 = 150$
$- 15 = 135.$

U 3 Es

Es soll Jemand in 8 Jahren 144 fl. so bezahlen, daß er jedes Jahr 4 fl. mehr als das vorige bezahle. Wie viel trift ihn das letzte Jahr?

$n = 8$

$d = 4$

$s = 144$ VII. Form: $\frac{s}{n} + d \times \frac{n-1}{2} = \frac{144}{8} + \frac{4 \times 7}{2} = 18 + 14 = 32.$

4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32.

Es soll Jemand 144 fl. so bezahlen, daß er das erste Jahr vier, und jedes folgende um 4 mehr als im vorhergehenden bezahle. Wie viel muß er das letzte Jahr bezahlen?

$s = 144$

$a = 4$

$d = 4$ VIII. Form: $\frac{-d \pm \sqrt{8ds + \overline{2a-d}^2}}{2}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{4608 + 16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4624}}{2} =$

$\frac{-4 \pm 68}{2} = -2 + 34 = 32.$

---

42 soll in 6 Theile getheilt werden. Der ers[illegible] Theil soll [illegible] seyn. [illegible]n wie viel müssen die Theile wachsen?

s =

$s = 42$
$n = 6$
$a = 2$ X. Form: $\frac{2s - 2an}{n \times n - 1} = \frac{84 - 24}{30} = \frac{60}{30}$
$= 2.$

2. 4. 6. 8. 10. 12.

---

100 Eyer sollen auf 2000 Schritte so vertheilt werden, daß das erste 10 Schritte vom Korbe weg liege, und immer eines gleich weit vom andern entfernt sey, damit sie einer Stück für Stück, wie es beym Eyerklauben gewöhnlich ist, einsammeln könne. Wie weit muß eines vom andern liegen?

$\omega = 2000$
$a = 10$
$n = 100.$ VIIII. Form: $\frac{\omega - a}{n - 1} = \frac{2000 - 10}{99} =$
$\frac{1990}{99} = 20\frac{10}{99}$ Schritte.

Die Summe einer arithmetischen Progression von 6 Gliedern macht 36, und das letzte Glied ist 11. Was haben sie für eine Differenz?

$s = 36$
$n = 6$
$\omega = 11.$ XI. Form: $\frac{2\omega n - 2s}{n \times n - 1} = \frac{132 - 72}{30} =$
$\frac{60}{30} = 2.$

Wenn ein Stein in der ersten Secunde 15, in der letzten 135 Schuhe macht, und jede folgende Secunde nach der ersten um 30 mehr, wie lange ist er gefallen? Man sucht n

$a = 15$

$d = 30$

$\omega = 135$. XIII. Form: $1 + \frac{\omega - a}{d} =$

$1 + \frac{135 - 15}{30} = 1 + \frac{120}{30} = 5''$

Seit 12 Uhr hat die Stundeglocke jetzt 36 Schläge gethan. Wie viel ist es also? Man suchet n

$a = 1$

$d = 1$

$s = 36$. XV. Form. $\frac{d - 2a \pm \sqrt{8ds + 2a - d^2}}{2d}$

$= \frac{1 - 2 \pm \sqrt{288 + 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{2} =$

$\frac{-1 + 17}{2} = \frac{16}{2} = 8$ Uhr.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. = 36.

Ein Both hat 21 Meilen gemacht, den ersten Tag eine, den letzten 6 in einer arithmetischen Progression. Wie viele Tage brauchte er? Man suche n

$a = 1$

$\omega = 6$

$s = 21$. XIIII. Form. $\frac{2s}{a + \omega}$ $\frac{42}{7} = 6$ Tage.

Jetzt

Jetzt ist es 12 Uhr, und die Stundeglocke hat 57 Schläge gethan. Wie viele Stunden brauchte sie dazu?

$\omega = 12$
$d = 1$
$s = 57$. XVI. Formel:

$$\frac{d + 2\omega \mp \sqrt{-8ds + (d + 2\omega)^2}}{2d} =$$

$$\frac{1 + 24 \mp \sqrt{-456 + 625}}{2} = \frac{25 \mp 13}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Wie viel machen alle Zahlen von 1 bis 100?

$a = 1$
$\omega = 100$
$n = 100$. XVII. Formel: $\frac{1}{2} n \times (a + \omega) = 50 \times 101$
$= 5050.$

Wie viele Schläge thut die Stundeglocke in 12 Stunden?

$a = 1$
$d = 1$
$n = 12$. XVIII. Formel: $n \times \left(a + d \times \frac{n-1}{2}\right) =$

$$12 \times \left(1 \times \frac{11}{2} + 1\right) = 12 \times \frac{13}{2} = 78.$$

Wie viel machen alle gerade Zahlen von 2 bis auf 100?

$\omega = 100$
$d = 2$
$n = 50.$ XVIIII. Form. $n \times \overline{\omega - d \times \frac{n-1}{2}} =$

$$50 \times \overline{100 - 2 \times \tfrac{49}{2}} = 50 \times 51 = 2550.$$

Wie viel machen alle ungerade Zahlen von 1 bis 100?

$a = 1$
$\omega = 99$
$d = 2.$ XX. Formel: $\frac{\overline{\omega + a} \times \overline{d + \omega} - a}{2d} =$

$\frac{100 \times 2 + 98}{4} = \frac{10000}{4} = 2500.$ Also die geraden und ungeraden zusammen $2500 + 2550 = 5050$ wie nach der XVII. Formel.

Andere Aufgaben.

Bey Ausgrabung eines Brunnens wird der erste Schuh zu 4 Batzen, und jeder folgende um 3 mehr bezahlt. Die Tiefe ist 29 Schuhe. Was beträgt der Arbeitslohn?

Gegeben $a = 4$
$d = 3$
$n = 20.$ wird gesucht s.

XVIIII. Formel: $s = n \times a + d \times \frac{n-1}{2} =$

$20 \times 4 + 3 \times \frac{19}{2} = 20 \times 4 + \frac{57}{2} = 20 \times \frac{65}{2} =$ 650 Batzen, oder 43 fl. 20 kr.

Ein

Ein Both wird auf 200 Meilen verschickt. Für die erste Meile bekömmt er 20 kr., für die zweyte 23, und so immer um 3 weiter. Was hat er zu fordern?

$n = 200$

$a = 20$

$d = 3$. Die nemliche Formel.

$200 \times \overline{20 + 3 \times \frac{199}{2}} = 200 \times 20 + \frac{597}{2} =$ $200 \times \frac{637}{2}$ 63700 kr., oder 1061 fl. 40 kr.

Ein Schmied beschlägt ein Pferd mit 32 Nägeln. Für den ersten verlangt er 1, für den zweyten 2 kr. und so weiter. Was kostet das Beschlagen.

$a = 1$

$d = 1$

$n = 32$, oder auch $\omega = 32$. $\overline{a + \omega} \times \frac{n}{2}$

$= 33 \times 16 = 528$ kr. $= 8$ fl. 48 kr.

Eben das findt man nach der zuvor gebrauchten Formel.

Es soll einer 100 Eyer auflösen. Das erste liegt 2 Schritte vom Korbe, und jedes andere um 2 Schritte weiter. Wie viele Schritte muß er thun?

$a = 2$

$d = 2$

$n = 100$. $n + \overline{a + d \times \frac{n - 1}{2}} =$

$100 \times (2 + 2 \times \frac{99}{2}) = 100 \times \overline{2 + 99} = 100 + 101$ $= 10100$. Weil er aber eben so viele Schritte zu

einem

einem Ey hin, als her machen muß = 20200. Wer also mit ihm wettet, er wolle ehender von einem Orte her etwas holen, als jener die Eyer in den Korb sammelt, muß auch einen Weg von 20200 Schritten zu machen haben; sonst ist die Wette ungleich.

Ein Brunnen auf 12 Fuß wird mit einem Arbeiter auf 19 fl. verdungen. Nachdem er 8 Fuß tief gegraben, übernimmt ein anderer den Accord. Wie viel trifft jeden nach der arithmetischen Progression?

$n = 12$

$s = 19$ fl. oder 285 Batzen. Weil, je tiefer man gräbt, die Arbeit schwerer wird, so wächst die Bezahlung mit der Zahl der Schuhe, und wenn man für den ersten Fuß a giebt, giebt man für den zweyten 2 a, für den dritten 3 a, daß also $a = d$ wird. Man suche also a nach einer Formel, worinn d, n, s vorkömmt, und setze anstatt d, a.

$$a = \frac{s}{n} - d \times \frac{n - 1}{2}$$

$$a = \frac{s}{n} - a \times \frac{n - 1}{2}$$

$$a = \frac{s}{n} - \frac{an + a}{2}$$

$$2a = \frac{2s}{n} - an + a$$

$$an + a = \frac{2s}{n}$$

$$a = \frac{2s}{n \times \overline{n + 1}} = 3\tfrac{17}{26}$$

Nun

Nun um den Lohn des ersten zu finden setze man $n = 8$
$s = an + dn \times \frac{n-1}{2}$. Setzt man wieder a statt
d, so bekömmt man endlich die Formel $\frac{s = an + an^2}{2}$
$= \frac{1710}{13} = 131 \frac{7}{13}$ Batzen bekömmt der erste, folglich
der zweyte Arbeiter $285 - 131 \frac{7}{13} = 154 - \frac{7}{13} =$
$153 \frac{6}{13}$, zusammen 285 Batzen, oder 19 fl.

Es hat Jemand 14 silberne Schüsseln. Die erste wiegt 59 Loth $= \omega$, die zweyte 55, jede um 4 Loth weniger. Wie viel wägen alle zusammen?

$\omega = 59$
$n = 14$
$d = 4.$ $s = n \times \overline{\omega - d \times \frac{n-1}{2}} = 14 \times$
$59 - 4 \times \frac{13}{2} = 14 \times 59 - 26. = 14 \times 33$
$= 462.$

59. 55. 51. 47. 43. 39. 35. 31. 27. 23. 19.
15. 11. 7. = 462.

---

48 soll in 9 Theile getheilt werden, wo immer einer um $\frac{1}{2}$ größer ist, als der vorhergehende.

$s = 48$
$n = 9$
$d = \frac{1}{2}$

$a = \frac{s}{n} - d \times \frac{n-1}{2} = \frac{48}{9} - \frac{1}{2} \times \frac{8}{2}$
$= \frac{48}{9} - 2 = \frac{48}{9} - \frac{18}{9} = \frac{30}{9} =$
$3 \frac{1}{3} = a$

$3\frac{1}{3}$. $3\frac{5}{6}$. $4\frac{1}{3}$. $4\frac{5}{6}$. $5\frac{1}{3}$. $5\frac{5}{6}$. $6\frac{1}{3}$. $6\frac{5}{6}$. $7\frac{1}{3} = 48.$

Es

Es ist Jemand 513 Gulden schuldig, und will sie in 11 Jahren so bezahlen, daß er jedes Jahr 3 mehr giebt, als das vorige. Wie viel bezahlt er auf den ersten Termin?

$s = 513$ $\quad a = \frac{s}{n} - d \times \frac{n-1}{2} = \frac{513}{11} - 3 \times 5$

$n = 11$ $\quad = \frac{513}{11} - \frac{165}{11} = \frac{348}{11} = 31\frac{7}{11} = a$

$d = 3$

$31\frac{7}{11}.\ 34\frac{7}{11}.\ 37\frac{7}{11}.\ 40\frac{7}{11}.\ 43\frac{7}{11}.\ 46\frac{7}{11}.\ 49\frac{7}{11}.$

$52\frac{7}{11}.\ 55\frac{7}{11}.\ 58\frac{7}{11}.\ 61\frac{7}{11} = 506 + \frac{7 \times 11}{11} =$

$7.\ 506 + 7 = 513.$

Ein Kaufmann gewinnt mit einer Summe jedes Jahr so viel, als er angelegt hat. Nach 9 Jahren hat er 2000 fl. Wie viel hat er angelegt?

$s = 2000$ $\quad a = \frac{s}{n} - d \times \frac{n-1}{2} =$

$a = d$ $\quad \frac{2000}{9} - a \times \frac{8}{2} = \frac{2000}{9} - 4a$

$n = 9$

$$a = \frac{2000}{9} - 4a$$

$$5a = \frac{2000}{9}$$

$$a = \frac{2000}{45} \left\{ 44\frac{20}{45} = 44\frac{4}{9} \text{ fl.} \right.$$

```
 45
180
---
200
 45
180
---
 20
```

Zwischen zwoen Zahlen a und ω eine beliebige Anzahl m arithmetisch proportionale Glieder zu finden

$a = a$

$\omega = \omega$

$n = m + 2$ weil a und ω mitgerechnet werden. Man sucht also d.

$$d = \frac{\omega - a}{n - 1} = \frac{\omega - a}{m + 1}.$$

Es sey $a = 2$ $\quad \frac{12 - 2}{5} - \frac{10}{5} = 2.\ (2)\,4.\,6.\,8.\,10.\,(12)$

$\omega = 12$

$m = 4$

Es sey $a = 1$ $\quad \frac{2 - 1}{6} = \frac{1}{6}\ (1)\,1\frac{1}{6}.\ 1\frac{2}{6}.\ 1\frac{3}{6}\ 1\frac{4}{6}.\ 1\frac{5}{6}\ (2)$

$\omega = 2$

$m = 5.$

Dritter Abschnitt.

Von den geometrischen Rationen, Proportionen, und Progressionen.

212. Wenn das Consequens in seinem Antecedens 2, 3, 4mal &c. enthalten ist, so sagt man, ihr Verhältniß sey 2, 3, 4fach, ratio dupla, tripla, quadrupla.

6 : 3. 6 hat ein zweyfaches Verhältniß zu 3, est in ratione dupla.

6 : 2. 6 hat ein dreyfaches Verhältniß zu 2, est in ratione tripla.

6 : 2. 8. est in ratione quadrupla ad 2.

Hin:

Hingegen

hat im ersten Falle 3 zu 6 rationem subduplam.
2 zu 6 — — subtriplam.
2 zu 8 — — subquadruplam.

213. Wenn von mehrern Rationen das Antecedens mit dem Antecedens, und das Consequens mit dem Consequens, oder nur ein Glied mit seinem gleichnamigen Consequens multiplicirt wird, so entsteht ein zusammen gesetztes Verhältniß, ratio composita

	2 : 3 simpla, radix
2 : 3 ratio simpla, radix	1 : 4 simpla, radix
4 : 8 ratio simpla, radix	3 : 5 simpla, radix.
8 : 24 ratio composita	6 : 60 composita.

a) Man glaube nicht, daß dieß nur für diejenigen gehöre, welche die eigentliche Mathematik studieren wollen. Nein, auch in der gemeinen Arithmetik braucht man es bey der so genannten regula composita. Z. B. 200 fl. zu fünf Procent tragen in drey Jahren 30 fl. wie viel tragen 350 fl. in 11 Jahren.

fl.	fl.	
200 :	30 : :	350
3		11
600 :	300	3850 = $192\frac{1}{2}$ fl.

Da werden überall die Antecedentia miteinander multiplicirt, und haben rationem compositam zu ihrem Consequens.

b) Sind die Rationen, aus welchen eine andere zusammen gesetzt wird, auch gleich, so wird die zusammengesetzte quadrata, cubica, biquadrata, genannt, je nachdem 2, 3, oder 4 gleiche Rationen zusammen gesetzt werden, und jede einzelne Ration heißt subduplicata, subtriplicata, subquadruplicata, oder radix quadrata, cubica, biquadrata.

2 : 4.

2 : 4. subduplicata, oder radix quadrata
3 : 6. subduplicata, oder radix quadrata

---

6 : 24. duplicata, oder ratio quadrata.

2 : 4. ratio subtriplicata, oder radix cubica
3 : 6. ————————————————
4 : 8. ————————————————

---

24 : 192 Ratio triplica, oder cubicata.

c) Der Quotient, der heraus kömmt, wenn das Consequens mit dem Antecedens dividirt wird, heißt der Exponent der Ration, exponens rationis, 2 : 6. $\frac{6}{2} = 3$ ist der Exponent 6 : 3. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ist der Exponent. Folglich sind die Rationen alle gleich, die einen gleichen Exponenten haben.

d) Weil bey einer ratio duplicata der Exponent allzeit eine Quadratzahl, bey einer triplicata eine Cubizahl ist, darum heißt man sie auch ratio quadrata, cubica.

214. **Hauptgrundsatz.** Jede geometrische Ration läßt sich so ausdrücken a : aq, oder b : bq, oder c : cq.

Denn a kann jedes Antecedens, b jedes, das nicht a, und c jedes das nicht a oder b ist, ausdrücken. Nun ist das Antecedens im Consequens entweder ganz oder nach einem Theile enthalten. Man nenne den Quotienten, der durch die Division des Consequens durch das Antecedens heraus kömmt q, so ist das Consequens $a \times q$, oder aq.

215. Jede geometrische **Proportion** wird durch die Formel a : aq :: b : bq vorgestellt.

Eine geometrische Proportion besteht aus zwo gleichen Rationen. Zwo Rationen sind gleich, wenn sie den nemlichen Exponenten haben (§. 201.). Nun haben diese zwo Rationen den nemlichen Exponenten $\frac{aq}{a} = q$. $\frac{bq}{b} = q$. und $b : bq$ kann jede andere Ration außer $a : aq$ vorstellen (§. 24.). Was also von dieser Proportion erwiesen wird, gilt von *allen* andern.

Der Werth einer Ration wird nicht verändert, wenn beyde Glieder mit der nemlichen Größe *dividirt*, oder multiplicirt werden.

Denn es bleibt der nemliche Exponent. Es sey die Ration.

$2a : 2aq$ Exponent q	$4 : 8$ Exponent 2
man multiplicire mit b	man multiplicire mit 2
$2ab : 2abq$ Exponent q	$8 : 16$ Exponent 2
$2a : 2aq$ Exponent q	man dividiere mit 2
man dividire mit 2	$2 : 4$ Exponent 2
$a : aq$ Exponent q.	

a) Dieß ist wichtig, weil es bey dem Gebrauche der Regel Detri manche Abkürzung der Rechnung giebt, wenn man die ersten zwey Glieder mit der nemlichen Zahl dividieren kann. Dann bekömmt man kleinere Zahlen. Und mit diesen ist es leichter multipliciren, und dividiren.

Dritter

Dritter Abschnitt.
Eigenschaften der geometrischen Proportion.

216. In jeder geometrischen Proportion geben die äußern Glieder miteinander multiplicirt eben so viel, als wenn man die mittern multiplicirt. Factum extremorum est aequale facto mediorum.

$a : aq :: b : bq$. $a \times bq = abq$. $aq \times b = abq$. Es ist aber $abq = abq$. $2 : 6 :: 3 : 9$. $2 \times 9 = 18$. $3 \times 6 = 18$.

a) Wenn also ein Glied fehlt, kann man es leicht finden, man setze nur x dafür, und verfahre nach diesem Lehrsatze.

$2 : 6 :: 3 : 9$.

Es fehle das erste $x : 6 :: 3 : 9$. $9x = 18$. $x = \frac{18}{9} = 2$
Es fehle das zweyte $2 : x :: 3 : 9$. $3x = 18$. $x = \frac{18}{3} = 6$
Es fehle das dritte $2 : 6 :: x : 9$. $6x = 18$. $x = \frac{18}{6} = 3$
Es fehle das vierte $2 : 6 :: 3 : x$. $2x = 18$. $x = \frac{18}{2} = 9$

b) Dieser Lehrsatz ist das Fundament der Regel Detri, de tribus terminis, den vierten daraus zu finden, welche wegen ihrem unbeschreiblichen Nutzen auch regula aurea genannt wird.

217. Die vier Glieder einer Proportion lassen sich achtmal versetzen, und sie behalten doch ihre Proportion

$2 : 6 :: 3 : 9$. Exponent 3
$9 : 6 :: 3 : 2$. Exponent $\frac{2}{3}$ bey beyden. Also doch gleiche Rationen.
$2 : 3 :: 6 : 9$ Exp. $1\frac{1}{2}$
$9 : 3 :: 6 : 2$ Exp. $\frac{1}{3}$
$6 : 2 :: 9 : 3$ Exp. $\frac{1}{3}$
$3 : 9 :: 2 : 6$ Exp. 3
$3 : 2 :: 9 : 6$ Exp. $\frac{2}{3}$

Wieder $2+6 : 2 :: 3+9 : 3$
oder $8 : 2 :: 12 : 3$ Expon. $\frac{1}{4}$
$2+6 : 6 :: 3+9 : 9$
oder $8 : 6 :: 12 : 9$ Expon. $\frac{3}{4}$
$6-2 : 2 :: 9-3 : 3$
oder $4 : 2 :: 6 : 3$ Expon. $= \frac{1}{2}$
$2+6 : 6-2 :: 3+9 : 9-3$
oder $8 : 4 :: 12 : 6$ Expon. $= \frac{1}{2}$

218. Wenn mehrere Rationen, oder eine Reihe von Rationen aufeinander folgen, so ist die Summe aller Antecedens zur Summe aller Consequens, wie jedes Antecedens zu seinem Consequens.

$a : aq.\ b : bq.\ c : cq.\ d : dq.$

$a+b+c+d : aq+bq+cq+dq :: a : aq$ oder $b : bq$ oder $c : cq$ 2c. denn der Quotient ist in beyden Rationen q.

$2 : 4 : 1 : 2 : 3 : 6 : 4 : 8 :$

$10 : 20 :: 2 : 4 :$ oder $1 : 2$ oder $3 : 6$. Der Quotient ist überall 2

Es wären zwar noch weit mehrere Lehrsätze von den Proportionen übrig, weil sie aber nicht unbedingt nothwendig sind, will ich sie unten in einem Anhange nachtragen.

Von den geometrischen Progressionen.

219. Jede geometrische Progression wird durch folgende Formel ausgedrückt.

$a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6$ 2c.

Alle diese Glieder sind in einem stetten Verhältnisse, und das Consequens der vorhergehenden Ration wird das

das Antecedens der folgenden (§. 202.). Nun kann a jedes Antecedens, q jeden Exponenten ausdrücken. Was also von dieser Progression erwiesen wird, gilt von allen.

220. Jedes Glied der Progression, und folglich auch das letzte ω ist gleich dem Producte aus dem ersten, und dem Exponenten erhoben zu jener Potenz, welche die Zahl der vorhergehenden Glieder anzeigt.

I	II	III	IIII	V	VI	VII
a:	aq:	aq^2:	aq^3:	aq^4:	aq^5:	aq^6.

Vor dem siebenten Gliede gehen sechs. Es ist also gleich $a \times q^6 = aq^6$. Das IIII ist gleich $a \times q^3 = aq^3$.

I	II	III	IIII	V	VI
2:	4:	8:	16:	32:	64

Das sechste Glied ist gleich dem Producte 2×2 eleviert auf die fünfte Potenz oder $2 \times 32 = 64$.

a) Wenn also der letzte Terminus ω, die Zahl aller Glieder $= n$, so ist die Zahl der vorhergehenden $n - 1$. Also

$$\omega = aq^{n-1}.$$

221. In jeder Progression sind die Glieder, welche rechts und links vom mittern, oder von den zwey mittern gleich weit entfernt sind, ineinander multipliciert gleich dem Quadrat des mittern, oder dem Product der mittern.

Man sehe die erste Progression. Das mittere Glied ist IIII. Das Quadrat davon $a^2 q^6$. Eben so groß ist das Product von I und VII $a^2 q^6$, und von II und VI. Der zwey mittern, wenn man nur sechs Glieder nimmt, ihr Product $a^2 q^5$. So viel macht auch I und VI, II und V miteinander multipliciert.

Man sehe die Reihe mit Ziffern $2 \times 64 = 128$. $4 \times 32 = 128$. $8 \times 16 = 128$. Bleibt das letzte Glied 64 weg, so ist 8 das mittere Glied, das Quadrat davon $8 \times 8 = 64$. Es ist aber auch $2 \times 32 = 64$. $4 \times 16 = 64$.

b) Dieß gilt auch bey einer stetten Proportion. Da ist das Quadrat des mittern Gliedes gleich dem Product der äußern.
$a : x :: x : b$. $x^2 = ab$. $2 : 4 :: 4 : 8$. $4 \times 4 = 16$. $2 \times 8 = 16$.
Andere Lehrsätze will ich wieder bis unten verschieben.

Von der Regel Detri.

222. Wir haben §. 216. gelernet jedes Glied zu finden, das in einer geometrischen Proportion fehlt. Fehlt das letzte Glied, so fanden wir die Formel

$$2 : 6 :: 3 : x. \quad x = \frac{3 \times 6}{2}$$

oder allgemein $a : b :: c : x. \quad x = \frac{b \times c}{a}$.

Dieß giebt die allgemeine Regel: **Das letzte Glied einer geometrischen Proportion zu finden, multipliciere man das zweyte, und dritte miteinander, und dividire das Product durch das erste. Der Quotient ist das vierte Glied.** Lateinisch heißt diese Regel: Duc ternum in medium, productum diuide primo.

223. So lange man in unbenannten Zahlen rechnet, hat die Anwendung dieser Regel keine Schwierigkeit.

keit. Aber wenn die Zahlen statt gewisser Dinge, Ellen, Pfunde, Menschen ꝛc. gesetzt werden, muß man zu erst Achtung geben, ob die gerade, oder umgekehrte Regel, directa vel inuersa, gebraucht werden muß. Dieses zu erkennen ist nicht so schwer, als manche glauben. Man merke vorläufig dieses. Eine Proportion besteht aus zwo gleichen Rationen. Man gebe Acht, ob das zweyte Antecedens größer, oder kleiner sey, als das erste. Ist es größer, so sehe man, ob auch das zweyte Consequens um so viel größer werden müsse, als das erste. Ist es kleiner, ob auch das zweyte Consequens kleiner werden muß, als das erste. Geschieht dieses, so ist es allzeit ein directes Verhältniß.

Ist aber das zweyte Antecedens größer als das erste, und muß hingegen das zweyte Consequens kleiner werden, als das erste; ist das zweyte Antecedens kleiner, als das erste, und muß das zweyte Consequens um so viel größer werden als das erste, so ist es allzeit ein umgekehrtes Verhältniß.

Ich will dieses anschaulich machen:

Kleiner	Kleiner	Größer	Größer	
a :	b ::	2a :	2b.	regula directa.
größer	größer	kleiner	kleiner	
2a :	2b ::	a :	b	

Kleiner	Kleiner	Größer	Kleiner	
a :	b ::	2a :	x	regula inuersa.
größer	größer	kleiner	größer	
2a :	2b ::	a	x	

Ob aber das zweyte Consequens eben so wachsen, oder abnehmen muß, wie das zweyte Antecedens gewachsen ist, oder abgenommen hat, das sieht man aus der Aufgabe selbst. Z. B. 2 Pfund kosten 4 fl. Wie viel kosten 6 Pfund? Steht so:

℔.	fl.	℔.	fl.
2:	4::	6:	x.

Ein jeder sieht, daß gleichwie 6 Pfund mehr sind als 2, so müssen sie auch mehr kosten, als 4 fl., oder wie das zweyte Antecedens (6) größer ist, als das erste (2) so müsse auch das zweyte Consequens (x) größer werden, als das erste 4. Stünde es so:

℔.	fl.	℔.	fl.
6:	12::	2:	x.

So sieht man auch, wie das zweyte Antecedens (2) kleiner ist als das erste (6) so müsse auch das zweyte Consequens (x) kleiner werden, als das erste (12). Also ist beyderseits regula directa.

Kleiner: Kleiner:: Größer: Größer.
Größer: Größer:: Kleiner: Kleiner.

Aber wir wollen die nemlichen Zahlen behalten, und ihnen nur andere Namen geben. Es soll eine Mauer aufgerichtet werden. 2 Maurer brauchen 4 Tage, wie lange brauchen 6 Maurer? Steht also:

M.	T.	M.	T.
2:	4::	6:	x.

Jeder sieht leicht, daß sechs Maurer nicht so lange brauchen dürfen, als zween. Es darf also das zweyte Conse-

Consequens (x) nicht eben so viel wachsen, als das zweyte Antecedens (6) in Ansehung des ersten (2) gewachsen ist, sondern es muß um so viel kleiner werden. Es stünde so:

M.	T.	M.	T.
6:	$1\frac{1}{3}$::	2:	x.

Das zweyte Antecedens (2) ist kleiner geworden, als das erste (6). Aber das zweyte Consequens (x) darf nicht kleiner werden, als das erste ($1\frac{1}{3}$); denn je weniger es Maurer sind, desto mehr Tage brauchen sie. Also ist beyderseits regula inuersa.

Kleiner: Kleiner:: Größer: Kleiner.
Größer: Größer:: Kleiner: Größer.

NB. So bald man nach Betrachtung der Aufgabe gesehen hat, daß die umgekehrte Regel gebraucht werden muß, setzt man das dritte Glied fürs erste, und läßt die übrigen in ihrer Ordnung, hernach multipliciert man, wie sonst, das zweyte und dritte miteinander, und dividirt das Product durch dieses neue erste Glied. Hier schreib im ersten Exempel statt:

I.	M.	T.	M.	T.
	2:	4::	6:	x.
	M.	M.	T.	T.
	6:	2::	4:	x.
	M.	T.	M.	T.
Im zweyt. II.	6:	$1\frac{1}{3}$::	2:	x.
	M.	M.	T.	T.
	2:	6::	$1\frac{1}{3}$	x.

224. **Vom Gebrauche der Regel Detri.** Das erste ist das Anschreiben der Aufgabe. Das, was

was man sucht, schreibt man mit x an die vierte Stelle. Das, von was es gesucht wird, an die dritte. Was mit dem x einen gleichen Namen hat, an die zweyte, und was mit dem dritten einen gleichen Namen hat, an die erste Stelle.

a) Es läge an sich gar nichts daran, wenn das zweyte, und dritte Glied miteinander verwechselt würden, und eines an die Stelle des andern käme. Aber es ist besser, wenn man sich an die gesagte Anschreibungsart gewöhnt, damit man bey der umgekehrten Regel allezeit das dritte Glied zum ersten machen könne. Uebrigens verfährt man nach der Regel: Duc ternum in medium &c.

Beyspiele.

225. Drey Ellen kosten 25 fl. wie viel kosten 15?

Ellen	fl.	Ell.	fl.
3	25 ::	15	x = 125

$$\frac{25 \times 15}{3} = 25 \times 5 = 125$$

a) Die Probe ist entweder, wenn das erste Glied mit dem letzten, und das zweyte mit dem dritten multiplicirt wird, und beyderseits ein gleiches Product kömmt, wie hier $3 \times 125 = 375$. $25 \times 15 = 375$. Oder wenn man das Exempel rückwärts macht, und das zweyte Glied heraus kömmt so:

Ell.	fl.	E.
15	125 ::	3

$$15 \quad 125 :: 3 = \frac{125 \times 3}{15} = \frac{25 \times 3}{3} = 25 \text{ fl.}$$

b) Hier hätte man auch gleich den Vortheil von §. 215. anbringen, und die ersten 2 Glieder mit 5 dividiren können.

E.	fl.	E.	fl.
3 :	25 ::	3	25.

1 Pfund

1 Pfund kostet 3 fl., wie viel kosten 5 Loth?

P.	fl.	L.	fl.
1 :	3 ::	5	x.

Weil das erste, und dritte Glied allzeit gleiche Namen haben müssen, hier aber das erste Pfund, das dritte Loth enthält, muß man vor der Auflösung entweder das Pfund zu Loth, oder die Loth zu einem Bruch vom Pfunde machen, und so bey allen übrigen ähnlichen Aufgaben. Man schreibe also so.

L.	fl.	L.	
32 :	3 ::	5 :	x oder
P.	fl.	P.	fl.
1 :	3 ::	$\frac{5}{32}$	x.

$$\frac{3 \times 5}{32} = \frac{15}{32} \text{ eines Guldens}$$

oder $\frac{3 \times 5}{1 \times 32} = \frac{15}{32}$ eines Gulden, d. i. 28 kr. 1 Häller.

Ellen	kr.	Ellen	kr.
$\frac{3}{4}$:	$2\frac{1}{2}$ ::	$\frac{5}{7}$:	x

$\frac{5}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{25}{14} : \frac{3}{4}$ oder $\frac{25}{14} \times \frac{4}{3} = \frac{100}{42}$ $= 2\frac{16}{42} = \frac{8}{21}$ kr.

	Kapital	Zins	Kap.	Zins.
	100 :	5 ::	354 :	x
div. mit 5.	20 :	1 ::	354 :	

$\frac{354 \times 1}{20} = \frac{354}{20}$ { 17 fl.

$\frac{14}{20} = \frac{7}{10} = \frac{420}{10} = 42$ kr.

Eine

Eine Magd hat 12 fl. Jahrlohn. Sie geht aber nach 15 Wochen, und 3 Tagen aus dem Dienste. Wie viel trifft sie?

Man mache alles zu Tagen,

T.	fl.	T.
365 :	12 : :	108

$$\frac{108 \times 12}{365} = \begin{array}{r} 1296 \\ 365 \\ \underline{1095} \\ 201 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3. \text{ fl. } \frac{201}{365} = \\ 33 \text{ kr. } \frac{15}{365} = \\ \frac{3}{73} \text{ kr.} \end{array} \right.$$

Eine Gemeinde muß dem Kühehirten jährlich bezahlen 20 fl. am Gelde, und 30 Metzen Getreid. Die werden nach der Anzahl des Viehes vertheilt. Es sind 240 Stück Rindvieh. Wie viel muß einer an Geld und Getreid für ein Stück bezahlen.

St.	M.	St.	
240 :	30 : :	1 :	x
24 :	3 : :	1 :	
8 :	1 : :	1 :	$\frac{1}{8}$ Metzen Getreid.

St.	fl.	St.	fl.
240 :	20 : :	1 :	x
24 :	2 : :	1 :	x
12 :	1 : :	1 :	$\frac{1}{12}$ fl. oder 5 kr.

524 fl. 40 kr. zu $3\frac{1}{2}$ Procent ausgelegt, wie viel Zins tragen sie in einem Jahr?

	fl.	Proc. Zins	fl.	x
	$100 :$	$\frac{7}{2} ::$	$524\frac{1}{2}$.	x
	fl.	Zins	fl.	
multip.	$200 :$	$7 ::$	$524\frac{2}{3}$ oder	
mit 2.	$200 :$	$7 ::$	$\frac{1574}{3}$	

$$\frac{1574 \times 7}{200 \times 3} = \frac{11018}{6\ 00}$$

$\{$ 18 fl. $\frac{218}{600} = \frac{109}{300} = \frac{6540}{300}$ kr. $= \frac{654}{30} = \frac{327}{15} =$ $\frac{109}{5}\Big[21\frac{4}{5}$ kr.

Ein Both hat in 2 Tagen 12 $\frac{2}{3}$ Meilen gemacht. Wie weit wird er in $5\frac{1}{2}$ Tag kommen.

T. M. T.

$$2 : \frac{38}{3} :: \frac{11}{2} : x = \frac{38 \times 11}{2 \times 3 \times 2} =$$

$$\frac{19 \times 11}{6} = \frac{209}{6} = 34\frac{5}{6}.$$

Wenn 5 so viel gälte als 4, was würde sodann 7 gelten?

$$5 : 4 :: 7 : \frac{28}{5} = 5\frac{2}{5}.$$

Ein Handelsmann hat an 12 Uhren 36 fl. gewonnen, wie viel würde er an 30 gewonnen haben?

	Uhr.	fl.	Uhr.	fl.
	$12 :$	$36 ::$	$30 :$	x
div. mit 12.	$1 :$	$3 ::$	30	$= \frac{3 \times 30}{1} = 90$ fl.

Eine

Eine französche Livre gilt $27\frac{1}{2}$ kr. Wie viele Livers macht eine Carolin?

kr.	Liv.	fl.	Liv.
$27\frac{1}{2}$:	1 : :	11 :	x

$$\frac{55}{2} : 1 :: 660 : \frac{66 \times 20}{55} = \frac{6 \times 20}{5}$$

$6 \times 4 = 24.$

---

2 Loth einer Waare kosten 12 kr., 3 pf. 1 hell. Wie viel kosten $6\frac{1}{2}$ ℔. und 2 Quentchen?

L.	kr.	pf.	hell.	℔.	
2 :	12	3	1 : :	$6\frac{1}{2}$ und 2 Quentchen?	x

Hier ist der kürzeste Weg, alles Gewicht zu Quentchen, deren 4 ein Loth ausmachen, und alles Geld zu Heller zu machen.

Quent.	Heller	Quent.	
8 :	103 : :	834	: x

$$\frac{103 \times 834}{8} = \frac{103 \times 417}{4} = \frac{42951}{4}$$

{ $10737\frac{3}{4}$ hell.

$\frac{10737}{8}$ { 1342 kr. 1 hell.

$\frac{1342}{60}$ { 22 fl. 22 kr.

Also 22 fl. 22 kr. $1\frac{3}{4}$ hell.

Auf-

Aufgaben
von der umgekehrten Regel Detri.

226. Das Proviant, das in einer Festung vorhanden ist, kleckt für 350 Mann 4 Wochen. Jetzt kommen aber noch 230 Mann dazu. Wie lange wirds klecken?

Mann. Wochen Mann.

350. 4 :: 580 natürlich weniger als
M. 4 Wochen.

580 : 350 :: 4 : x

$58 : 35 :: 4 = \frac{35 \times 4}{58} = \frac{35 \times 2}{29}$

$= \frac{70}{29}$ | $2\frac{12}{29}$ Wochen.
12

Wenn das Schaf Korn 6 fl. gilt, wiegt ein Batzenlaib 3 ℔. Wie viel wird er wägen, wenns 10 fl. gilt.

fl. ℔. fl.

6 : 3 :: 10 : x weniger als 3 ℔.

$10 : 6 :: 3 : \frac{6 \times 3}{10} = 1\frac{4}{5}$ nicht gar 2 ℔, sondern 1 ℔ $25\frac{3}{5}$ Loth.

Der Nürenberger Centner verhält sich zum Augsburger, wie 110 : 100, oder 100 Nürenberger Pfund machen 110 Augsburger Pfund.

Nun hat ein Augsburger Handelsmann 2 Centner 36 Pfund Caffee von Nürenberg verschrieben. Wie viel

viel Pfunde wird er in Augsburg haben? Man darf nicht ansetzen.

N. A. N.
110 : 100 :: 236 : x, sondern
N. A. N.
100 : 100 :: 236 = 259$\frac{3}{5}$. Hier muß das Verhältniß 110: 100 gleich Anfangs umgekehrt werden, weil es falsch ist, daß 110 N. 100 A. geben, wohl aber umgekehrt.

So rechnet man auch mit Ellen, Schuhen verschiedener Länder, und Städte, wenn man eine Gattung auf die andere reducieren will, und ihr Verhältniß weis. Z. B. Der Pariser Schuh verhalte sich zum Münchner, wie 1444: 1000, oder 1000 Pariser Schuhe machten 1444 Münchner. Man hat nun eine Standlinie von 20000 Münchner Schuhen gemessen. Wie viel wären dieß Pariser Schuhe?

1444 : 1000 :: 20000 = 13850$\frac{150}{361}$

Sechs Taglöhner hauen 100 Klafter Holz in 16 Tagen. Wie viel Taglöhner braucht man, wenn sie in einem Tage müßten gehauen werden.

T. Tagl. T.
16 6 :: 1
1 : 16 :: 6 : 96 Taglöhner

Denn wie die Zeit um 16mal weniger wird, anstatt 16 Tag einer, so müssen die Taglöhner um 16mal mehr werden, anstatt 6, 16mal 6 oder 96.

Mehrere

Mehrere Exempel werden bey der zusammengesetzten Regel vorkommen. Nur noch eines.

Wenn das Tuch 2 Ellen breit ist, brauche ich zu einem Rock 5 Ellen. Nun nehme ich ein Tuch, das $2\frac{1}{2}$ Ellen breit ist. Wie viel brauche ich?

Ell. B.	Ell.	Ell. B.
2 :	5 ::	$\frac{5}{2}$:
$\frac{5}{2}$:	2 ::	5 :

Da muß ich weniger brauchen, je breiter es wird

$$\frac{2 \times 5 \times 2}{5} = 4 \text{ Ellen.}$$

Man verkauft sich also meistentheils nicht, wenn man feiners Tuch kauft, obwohl dieses theurer ist; denn es ist um so viel breiter, und man braucht weniger.

Von der zusammengesetzten Regel Detri.

227. Die gemeinen Rechenmeister haben noch viele andere Regeln, als die Regula societatis, Regula falsi, Regula caeci, oder virginum, Regula alligationis. Wir können, die erste ausgenommen, alle entbehren, weil sich die hieher gehörigen Exempel viel leichter durch die Algebra auflösen lassen. Doch will ich von allen ein Exempel geben.

Drey sollen 78 fl. untereinander theilen. Was der erste bekömmt, weis man nicht, der zweyte bekömmt zweymal, der dritte dreymal so viel als der erste.

Der Algebraist ist gleich fertig $x + 2x + 3x = 6x = 78. \quad x = \frac{78}{6} = 13$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 26 \\ \underline{39} \\ 78 \end{array}$$

Aber der gemeine Rechner braucht hier die Regula falsi, das ist, er nimmt etwas falsches für den Theil des ersten an. Z. B. Hätte

	I. =	1 oder	2
so hätte	II. =	2	4
	III. =	3	6

Nun sagt er: Wie sich die falsche Summe 6 zur wahren 78 verhält, so verhält sich der erste falsche Theil zum ersten wahren.

$$6 : 78 :: 1 : \tfrac{78}{6} = 13.$$

$$\text{ferner } 6 : 78 :: 2 : \frac{78 \times 2}{6} = \tfrac{78}{3} = 26$$

$$\text{endlich } 6 : 78 :: 3 : \frac{78 \times 3}{6} = \tfrac{78}{2} = 39$$

a) Er muß also öfters mehrere Proportionen auflösen, da der Algebraist mit einer Zeile fertig ist.

b) Regula virginum wird zur Auflösung der unbestimmten Aufgaben gebraucht, und hat den Namen von einer Aufgabe, worinn Jungfrauen vorkommen, und womit man ehemals vielen Lärmen machte. Z. B. Männer, Weiber, und Jungfern verzechten 20 fl. Ein Mann gab 2 fl. ein Weib 1, eine Jungfer ½ fl. Wie viel waren es Männer, Weiber, Jungfern? Von solchen Aufgaben ist genug gesagt worden.

c) Die

c) Die Regula alligationis wurde bey Vermischung der Dinge, eines schlechtern mit dem bessern Wein, um einen mittlern zu bekommern, oder bey Vermischung des Zins, Bleyes, Kupfers rc. gebraucht. Sie war nicht viel von der Regula falsi, oder falsae positionis verschieden. Auch dazu haben wir in der Algebra einen kürzern Weg.

228. Regula societatis, Gesellschaftsregel ist von der gewöhnlichen Regel Detri nur darinn unterschieden, daß sie öfters wiederholt werden muß. Sie wird gebraucht um für eine Gesellschaft nach ihrem Beytrage auch Gewinnst oder Verlurst verhältnißmäßig zu berechnen. Z. B. Drey Kaufleute haben zusammen geschossen.

I. = 140 fl.
II. = 235 fl.
III. = 500 fl.

Sie haben damit gewonnen 1265 fl. Wie viel trift jeden seiner Einlage gemäß von diesem Gewinnste, da es unbillig wäre ihn in drey gleiche Theile zu theilen? Hier hat man diese einzige Regel: Man addire alle Einlagen zusammen, und sage: Wie sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinnst verhält, so verhält sich die Einlage des ersten zu seinem Gewinnste. Dieß wiederhole man für jede Einlage besonders. Macht die Summe der einzelnen Gewinnste den ganzen angegebenen Gewinnst aus, so hat man recht gerechnet. Hier steht die Rechnung so:

Einl.	Gew.	Einl.	Gew.	
875 :	1265 ::	140 :	x	oder
175 :	254 ::	140 :	x	$202\frac{2}{5}$
175 :	254 ::	235 :	x	$339\frac{26}{35}$
175 :	254 ::	500 :	x	$722\frac{6}{7}$
				1265.

a) Es ist klar, daß man den Verlurst eben so berechnen müßte, wie den Gewinust, damit er unter alle verhältnißmäßig vertheilt werden könnte.

b) Manchmal kömmt auch der Fall, daß man die zusammengesetzte Gesellschaftsregel braucht, z. B. wenn die Theilnehmer ihr Geld früher, oder später als andere eingelegt haben. In diesem Falle muß man die eingelegte Summe eines jeden mit der Zeit multipliciren, seit welcher er sie eingelegt hat. Ich will ein einziges Beyspiel geben.

A schließt 300 auf 5 Jahre.
B - - 200 auf 3 Jahre. Sie gewinnen damit
C - - 100 auf 2 Jahre. 1200 fl.

$300 \times 5 = 1500$
$200 \times 3 = 600$
$100 \times 2 = 200$

Es ist nemlich eben so viel, als wenn A 1500, und B 600 auf ein Jahr hergeschossen hätten.

Einl.	Gew.	Einl.	
2300 :	1200 ::	1500 :	x
23 :	12 ::	1500 :	$782\frac{14}{23}$
23 :	12 ::	600 :	$313\frac{1}{23}$
23 :	12 ::	200 :	$104\frac{8}{23}$
			1200.

229. Die

229. Die zusammen gesetzte Regel Detri hat alsdann Platz, wenn mehr als drey Glieder gegeben sind, und daraus etwas gesucht wird. Z. B. Fünf Schreiber, welche des Tages 8 Stunden schreiben, liefern in 25 Tagen 1000 Bögen. Wie viel liefern 12 Schreiber, wenn sie des Tages 10 Stunden schreiben?

a) Solche Aufgaben aufzulösen gebrauchte man ehemals die Regula quinque, septem &c. auf zweyerley Art. Entweder wurde die gemeine Regel Detri öfters angewendet, daß man z. B. im ersagten Falle suchte, was 8 Schreiber in 10 Stunden, und dann, was 12 Schreiber schreiben, wenn 8 die gefundene Anzahl Bogen schreiben, oder man gebrauchte die Regel Detri nur einmal, indem man die Anzahl der Schreiber A mit ihren Tagen und Stunden, und so auch die Zahl der Schreiber B multiplicierte, und dann sagte: A liefert so viel Bögen, wie viel wird B liefern? Allein jetzt löset man solche Aufgaben viel leichter durch die **Reesische Regel** verbunden mit der **Kettenregel** auf. Jene hat den Namen von ihrem Erfinder Rees, diese davon, daß alle Glieder der Aufgabe so aneinander gereihet werden, wie die Glieder einer Kette.

230. In allen solchen Aufgaben ist etwas, das als Ursache, und wieder etwas, das als Wirkung betrachtet werden kann. Man unterscheide bey jeder Aufgabe diese beyden Dinge recht wohl. Hernach sehe man, was dazu beyträgt, daß die Wirkung größer wird, und was sie kleiner macht. Darauf schreibe man die Aufgabe so an.

1. Was gesucht wird, es mag Ursache, oder Wirkung seyn, das drücke man durch x, oder ein Stern-

chen aus, und schreibe seinen Namen dazu, und wenn es eine Ursache ist, alles, was zur Vergrößerung der Wirkung beyträgt, mit seinem Namen darunter, und was die Wirkung vermindert, ebenfalls mit seinem Namen, aber als Nenner der vergrößernden Ursachen darunter. Neben diesem Ansatz ziehe man einen Strich der Länge nach herunter.

2. Rechter Hand setze man entweder die Wirkung, oder, wenn diese gesucht wird, die Ursache auf die angezeigte Art.

3. Linker Hand setze man wieder alle jene Stücke der Aufgabe, welche gleiche Namen mit dem Nr. 2. Angezeigten haben.

4. Endlich rechter Hand alle die, welche mit dem Nr. 1 Angezeigten gleiche Namen haben, daß sich also die angeschriebene Aufgabe gerade so endiget, wie sie angefangen hat.

5. Man multipliciere alle Ziffer, die rechter Hand stehen miteinander, und alle, die linker Hand sind, auch miteinander, doch so, daß alle Nenner der Brüche, die rechter Hand stehen, auf die linke, und umgekehrt gebracht werden. Dieß Product rechter Hand wird durch jenes linker Hand dividiert, und der Quotient ist das verlangte x. Dieß ist die Reesische Regel.

231. Die Kettenregel besteht darinn, daß man allzeit linker Hand mit dem wieder anfangen muß, mit was man rechter Hand aufgehört hat, und das so lange fortsetze, bis das letzte Glied rechter Hand dem ersten linker Hand nach allen seinen Theilen gleichförmig wird.

232.

232. So zusammengesetzt, und schwer diese Regeln im Anfange scheinen, so klar werden sie durch die Anwendung auf besondere Fälle. Es sey folgendes

Beyspiel. 100 fl. für 5 Procent tragen in 4 Jahren 20 fl. Interresse. Wie viel tragen 6000 für 3 Procent in 10 Jahren?

Wirkung ist hier das Interresse. Die Ursachen von welchen selbiges abhängt, sind lauter vergrößernde. Das Interresse hängt nemlich von der Größe des Kapitals, der Größe der Procente, und der Anzahl der Jahre ab, wie lange das Kapital auf Zinsen liegt. Man schreibe also so an:

* Interresse.	6000 Kapital.
	3 Procent.
	10 Jahre.
100 Kapital.	
4 Jahre.	
5 Procent.	20 Interresse.
$100 \times 5 \times 4$	$6000 \times 3 \times 10 \times 20.$

Ehe man noch die wirkliche Multiplication vornimmt, dividire man beyderseits durch einen gemeinschaftlichen Divisor, oder durch mehrere so lange es angeht. Hernach kann man erst die vorgeschriebene Multiplication, und Division bequemer vornehmen.

Hier lasse man erstens beyderseits gleichviel Nullen weg, bleibt

5×4	$6000 \times 3 \times 2.$ Divid. mit 2.
5×2	$6000 \times 3.$ Divid. mit 2.
5	$3000 \times 3.$ Div. mit 5.
	$600 \times 3 = 1800$ fl. Interresse.

Ein anderes Beyspiel. 10 Schaf Getreid, wenn man einer Person täglich 2 Pfund Brod giebt, erklecken für 50 Personen 30 Tage lang. Wie lange werden 20 Schafe für 100 Personen klecken, wenn man jeder des Tages 4 Pfund giebt?

Für die Wirkung gelten hier die Tage. Es werden deren mehrere, wie mehr Schafe Getreid da sind. Hingegen weniger, je mehr Personen davon leben müssen; und je mehr täglich jede bekömmt. Die Schafe sind also vermehrende, die Personen, und Pfunde vermindernde Ursachen der Wirkung. Man setze also die Aufgabe so an:

* Tage.	20 Schafe.
	$\frac{1}{100}$ Pers.
	$\frac{1}{4}$ ℔.
10 Schaf.	
$\frac{1}{50}$ Pers.	
$\frac{1}{2}$ ℔.	30 Tage.
10. 100. 4.	20. 50. 2. 30.
4	2. 5. 2. 3.
	$5 \times 3 = 15$ Tage.

Ein

Ein Beyspiel von der Kettenregel. Hundert Caroline à 11 fl., wie viele Conventionsthaler machen sie?

* Conv. Thaler.	100 Caroline	
1 Carol.	11 fl.	
1 fl.	60 kr.	
144 kr.	1 Conv. Thlr.	
144	100. 11. 60	div. mit 12.
12	100. 11. 5	div. mit 2.
6	50. 11. 5	div. mit 2.
3	25. 11. 5	$= \frac{1375}{3} = 458\frac{1}{3}$ Thaler.

233. Beweis der Reesischen Regel. Es sey eine Wirkung E. Jede sie vermehrende Ursache C. Jede sie vermindernde T. Es sey eine andere Wirkung e, ihre vermehrende Ursache c, ihre vermindernden t.

Weil die Wirkungen sind, wie ihre Ursachen, so ist $E : e :: \frac{C}{T} : \frac{c}{t}$, oder $E : e :: Ct : cT$. Das heißt, eine größere Wirkung verhält sich zu einer kleinern, wie die vergrößernde Ursache der ersten gerade, und umgekehrt wie die vermindernde Ursache zur vergrößernden Ursache der zweyten gerade, und umgekehrt wie die vermindernde. Suchet man nun $e = x$, so

 hat

hat man $e = \frac{EcT}{Ct}$. Aber eben dieß erhält man durch die Reesische Regel.

	c
e oder x	$\frac{1}{t}$
C	
$\frac{1}{T}$	E
C . t	c . TE

$e = cTE : Ct$. Eben so wird der Beweis ausfallen, wenn man E, C, T, c oder t suchet.

234. **Beyspiele zur Uebung.** Drey Taglöhner, wenn sie des Tages 8 Stunde arbeiten, hauen in 12 Tagen 36 Klafter Holz. Wie viele Klafter machen 15 Taglöhner in 4 Wochen, wenn sie des Tages 10 Stunde arbeiten?

Hier sind alle Ursachen vermehrend.

* Klafter.	15 Tagl. in 24 Tage, eine Woche zu 6 Tagen 10 Stund.	
3 Tagl. 12 Tage. 8 Stund.	36 Klafter	
3. 12. 8.	15. 10. 36. 24	mit 12 divid.
3. 8.	15. 10. 3. 24	mit 3.
8.	15. 10. 24.	mit 2.
4.	15. 5. 24.	mit 4.
	15. 5. 6 = 15 × 30 = 450 Klafter.	

235. Die

235. Die Probe wird gemacht, wenn man die gefundene Zahl an die Stelle des * setzt, und dann sieht, ob sich die Zahlen beyderseits gegeneinander aufheben.

450. 3. 12. 8.	15. 24. 10. 36.
45. 3. 12. 8.	15. 24. 36.
45. 3. 8.	15. 24. 3.
45. 8.	15. 24.
45.	15. 3.
3.	3.
0.	0.

Wir wollen jetzt das vorige Exempel wieder vor uns nehmen, und die Zahl der Taglöhner suchen.

* Tagl.	450 Klaft.
24 Tag.	
10 Stund.	
36 Klaft.	3 Tagl.
	12 Tag.
	8 Stund.
24. 10. 36.	450. 3. 12. 8.
24. 36.	45. 3. 12. 8.
3. 3.	45. 3.
3.	45

$\frac{45}{3} = 15$ Tagl.

Man

Man suche wie viele Stunden des Tages sie arbeiten müssen.

* Stunde	450 Klafter.
15 Tagl.	
24 Tag.	
36 Klaft.	8 Stunde.
	3 Taglöhner.
	12 Tage.
15. 24. 36.	450. 8. 3. 12.
5. 2. 36.	150. 8. 3.
36.	30. 4. 3.
9.	30. 3.
3.	10. 3.
	10 Stunde.

Man suche endlich auch die Tage

* Tage.	450 Klaft.
15 Tagl.	
10 St.	
36 Klaft.	12 Tage.
	3 Taglöhn.
	8 Stund.
15. 10. 36.	450. 12. 3. 8.
10. 36.	30. 3. 8. 12.
3.	3. 3. 8.
	3×8
	$3 \times 8 = 24$ Tage.

Vierter



Vierter Abschnitt.

Anhang
zu der Lehre von den geometrischen Proportionen, Progressionen, und etwas von den Reihen. *

236. Zwischen zweyen Gliedern so viele geometrische proportionale zu finden, als man nur will.

Es seyn diese Glieder a ..... b. Theile jedes durch a, oder b. Mit a kömmt heraus $\frac{a}{a}, \frac{b}{a} = 1, \frac{b}{a}$. Es sey $\frac{b}{a} = c$. Weil $1 = c^0$, und $\frac{b}{a} = c = c^1$, so sind jetzt die Glieder, zwischen welchen man geometrisch proportionale Größen suchen muß $c^0 \ldots\ldots c^1$.

Die Exponenten geometrisch proportionaler Größen stehen in arithmetischer Proportion, (wird §. 262 erwiesen werden). Wenn man nun so viele geometrisch proportionale Zwischengrößen verlangt, als die Zahl m ausdrückt, so suche man zu erst die arithmetische proportionalen Exponenten für diese Größen zwischen c^0 und c. Ihre Differenz ist nach dem letzten Lehrsatze von arithm. Progr. §. 208 $\frac{d = \omega - a}{m + 1}$, oder weil hier $a = 0$, $\omega = 1$, $\frac{1}{m+1}$.

Also

* Was in diesem Anhange vorkömmt, habe ich darum von der übrigen Lehre von den Proportionen getrennt, weil es für Anfänger entbehrlich ist. Sonst könnte alles, bis auf die Lehre von den Reihen nach §. 221 eingeschaltet werden.

Also sind die Exponenten o, $\frac{1}{m+1}$, $\frac{2}{m+1}$, $\frac{3}{m+1}$ rc. bis, wenn für m sein Werth gesezt wird, auch der Zähler des Bruches m + 1 wird; denn als: dann ist $\frac{m+1}{m+1} = 1$, oder der Exponent des zweyten gegebenen Gliedes c^1. Oder, was eben so viel ist, bis die Anzahl aller Glieder, das erste, und lezte mitgerechnet, m + 2 wird.

Diese Exponenten gebe man nun der Ordnung nach der Größe c, und man hat folgende geometrische Progression $c^0 : c^{\frac{1}{m+1}} : c^{\frac{2}{m+1}} : c^{\frac{3}{m+1}} : c^{\frac{4}{m+1}}$ .... c^1, oder $c^0 : \sqrt[m+1]{c^1} : \sqrt[m+1]{c^2} : \sqrt[m+1]{c^3} \sqrt[m+1]{c^4}$ .... c^1. Für c seze man $\frac{b}{a}$ seinen Werth.

$$1 : \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : \sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : \sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} \sqrt[m+1]{\frac{b^4}{a^4}} \ldots . \frac{b}{a}$$

Und weil im Anfange die Glieder a .... b mit a dividirt worden, multiplicire man jezt wieder jedes Glied damit. Also kömmt

$$\div a : \sqrt[m+1]{a^m b} : \sqrt[m+1]{a^{m-1} b^2} : \sqrt[m+1]{a^{m-2} b^3} : \sqrt[m+1]{a^{m-3} b^4} \ldots . b.$$

Es sey $a = 2$, $b = 3$. $m = 2$. so wird seyn

$$\div 2 : \sqrt[3]{4 \times 3} : \sqrt[3]{2 \times 9} : 3 =$$

$$2 : \sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{18} : 3 =$$

$$2 : 2,2894286 : 2,6207414 : 3.$$

Es ist auch $\frac{2,2894286^2}{2} = 2,6207414$, und

$\frac{2,6207414^2}{2,2894286} = 3$, oder $\div a : x : y ; b.$

237. Jede zwey Glieder, die einen gewissen Abstand voneinander haben, verhalten sich zueinander, als wie zwey andere nebeneinander stehende, zu der Potenz erhoben, die den Abstand jener zwey Glieder anzeigt

I.	II.	III.	IIII.	V.	VI.	VII.
a :	aq :	aq^2 .	aq^3 :	aq^4 :	aq^5 :	aq^6

das III. und VII. Glied stehen voneinander ab um 4 Glieder. Also ist

$$aq^2 : aq^6 :: a^4 : a^4 q^4. \text{ Exponent } q^4.$$

$$aq^2 : aq^6 :: a^4 q^4 : a^4 q^8 \text{ Exp. } q^4 \text{ u. s. f.}$$

a) Oder allgemein: Es seyn 2 Glieder aq^n, aq^m, ihr Abstand $m - n$, ein anders Glied sey aq^r, und das folgende aq^{r+1}, so ist

$$aq^n : aq^m :: a^{m-n} q^{mr-nr} : a^{m-n} q^{mr-nr+m-n}$$

denn $\frac{aq^m}{aq^n} = q^{m-n}$, und $\frac{a^{m-n} q^{mr-nr m-n}}{a^{m-n} q^{mr-nr}} = q^{m-n}.$

238. Jede

235. Jede geometrische Progression wird durch die Formel $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$ rc. ausgedrückt. §. 219, oder weil $q^0 = 1$. (§. 86. III. Reg. a)) $aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$.

239. Man kann auch eine geometrische Progression so vorstellen, wenn man einer Größe nach und nach lauter Exponenten giebt, die eine arithmetische Progression ausmachen. Denn da kömmt immer der nemliche Quotient, wenn das Consequens durch das Antecedens dividirt wird.

$a^{c} : a^{c\pm d} : a^{c\pm 2d} : a^{c\pm 3d} : a^{c\pm 4d}$. Der Quotient ist immer $\pm$ d.

$2^{1} : 2^{1\pm 2} : 2^{1\pm 4} : 2^{1\pm 6} : 2^{1\pm 8}$. Der Quotient ist immer $\pm$ 2.

a) Folglich machen die in der Ordnung nacheinander folgenden Potenzen der nemlichen Zahl eine geometrische Progression aus. Z. B.

$$3^1 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : 3^5 : 3^6 \text{ rc.}$$
$$3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 \text{ rc.}$$

weil die Exponenten immer die nemliche Differenz haben, und eine arithmetische Progression ausmachen. Dieser Satz hat seinen Nutzen in der Lehre von den Logarithmen.

239. Was wir (§. 208.) bey der arithmetischen Progression gethan haben, geht auch bey der geometrischen an. Es können nemlich aus folgenden fünf Stücken einer Progression, dem ersten Gliede, a, dem letzten,

ten, ω, dem Exponenten, q, der Zahl der Glieder, n, und der Summe der Glieder, S, immer zwey gefunden werden, wenn drey gegeben sind, obschon manchmal die Rechnung ziemlich beschwerlich wird. Es sind, wie bey der arithmetischen Progression 20 verschiedne Fälle möglich.

Nach (§. 220. a) ist I. $\omega = a q^{n-1}$. Folglich

$$\text{II. } a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$$

$$\text{III. } q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$$

$$\text{IIII. } n = 1 + \text{Log.} \frac{\omega}{a} : \text{Log. } q$$

wie diese letzte Formel gefunden werde, wird sich erst unten in der Lehre von den Logarithmen zeigen.

240. In jeder geometrischen Progression ist die Summe aller Glieder, ohne das letzte, zur Summe aller Glieder ohne das erste, wie jedes Glied zum nächstfolgenden (§. 218.); weil alle Glieder ohne das letzte ein Antecedens, und alle ohne das erste ein Consequens sind. Oder $S - \omega : S - a :: a : aq :: 1 : q$. Also $S - a = Sq - \omega q$. Daraus entstehen wieder vier Formeln.

$$\text{V. } S = \frac{\omega q - a}{q - 1}$$

$$\text{VI. } a = \omega q - S \times \overline{q - 1}$$

$$\text{VII. } q = \frac{S-a}{S-\omega}$$

$$\text{VIII. } \omega = \frac{a+S\times\overline{q-1}}{q}$$

Setzet man in der VI. Formel statt a den in der II. gefundenen Werth von a, so entsteht eine neue Formel $\frac{\omega}{q^{n-1}} = \omega q - S\times\overline{q-1}$, daraus findt man

$$\text{VIIII. } \omega = \frac{\overline{Sq-S}\times q^{n-1}}{q^{n-1}}$$

$$\text{X. } S = \frac{\omega}{q^{n-1}}\times\frac{q^{n-1}}{q-1}$$

$$\text{XI. } n = 1 + \text{Log.}\frac{\omega}{S-q\times\overline{S-\omega}} : \text{Log. } q.$$

$$\text{XII. } q^{n} - \frac{S}{S-\omega}q^{n-1} + \frac{\omega}{S-\omega} = 0,$$ *welche* Gleichung eines höhern Grades n ist, und nach diesen Anfangsgründen nicht aufgelöst werden kann.

In der VIII. Formel setze man für ω dessen Werth aus der I. Formel, das giebt die Gleichung $a q^{n-1} = \frac{a+S\times\overline{q-1}}{q}$, und

XIII.

$$\text{XIII.}\quad a = \frac{S\times\overline{q-1}}{q^{n-1}}$$

$$\text{XIIII.}\quad n = \text{Log.}\left(S\times\frac{q-1}{a}+1\right) : \text{Log. } q.$$

$$\text{XV.}\quad q^{n} - \frac{q}{a}\times S + \frac{S}{a} - 1 = 0$$

$$\text{XVI.}\quad S = a\times\frac{q^{n}-1}{q-1}$$

In der VII. Formel setze man für q seinen Werth aus der III Formel, so erhält man die Gleichung $\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = \frac{S-a}{S-\omega}$, oder $\frac{\sqrt[n-1]{\omega}}{\sqrt[n-1]{a}} = \frac{S-a}{S-\omega}$, oder $\sqrt[n-1]{\omega} = \sqrt[n-1]{a}\times\frac{S-a}{S-\omega}$, oder $\sqrt[n-1]{\omega}\times\overline{S-\omega} = \sqrt[n-1]{a}\times\overline{S-a}$. Erhebt man beyde Glieder zur Potenz $n-1$, so kommen folgende Formeln:

$$\text{XVII.}\quad \overline{S-\omega}^{\,n-1}\times\omega - \overline{S-a}^{\,n-1}\times a = 0$$

$$\text{XVIII.}\quad \overline{S-a}^{\,n-1}\times a - \overline{S-\omega}^{\,n-1}\times\omega = 0$$

$$\text{XVIIII.}\quad n = 1 + \text{Log.}\,\frac{\omega}{a} : \text{Log.}\,\frac{S-a}{S-\omega}.$$

$$\text{XX.}\quad S = \frac{\omega\sqrt[n-1]{\omega} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{\omega} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Läßt man diejenigen Formeln weg, die wenigstens nach der in diesen Anfangsgründen gegebenen Anweisung für uns unbrauchbar sind, so bleiben folgende:

Suche,	wenn gegeben ist,	durch die Formel.
a	ω. q. n.	$\omega : q^{n-1}$
	ω. q. S.	$\omega q - S \times \overline{q-1}$
	q. n. S.	$S \times \overline{q-1} : q^{n} - 1$
ω	a. q. n.	$a q^{n-1}$
	a. q. S.	$(a + S \times \overline{q-1}) : q$
	n. q. S.	$(Sq - S) \times q^{n-1} : (q^{n} - 1)$
q	a. ω. n.	$\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = \text{Log.}\ \frac{\omega}{a} : \overline{n-1}.$
	a. ω. S.	$(S - a) : (S - \omega)$
n	a. ω. q.	$1 + \text{Log.}\ \frac{\omega}{a} : \text{Log.}\ q.$
	S. ω. q.	$1 + \text{Log.}\ \frac{\omega}{S - q \times \overline{S - \omega}} : \text{Log.}\ q.$
	a. S. q.	$\text{Log.}\ (1 + S \times \frac{q-1}{a}) : \text{Log.}\ q.$
	a. ω. S.	$1 + \text{Log.}\ \frac{\omega}{a} : \text{Log.}\ \frac{S-a}{S-\omega}.$

Suche,

Suche,	wenn gegeben ist,	durch die Formel.
S	a. ω. q.	$(\omega q - a) : (q - 1)$
	n. ω. q.	$\frac{\omega}{q^{n-1}} \times \frac{q^{n} - 1}{q - 1}$
	a. n. q.	$a \times (q^{n} - 1) : q - 1$
	a. n. ω.	$\frac{\omega \sqrt[n-1]{\omega} - a \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{\omega} - \sqrt[n-1]{a}}$

241. Wir wollen jeßt die Anwendung dieser Formeln in einzelnen Beyspielen zeigen.

Es sey die Progression 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.

$a = 3$
$\omega = 384$
$q = 2$
$n = 8$
$S = 765$

$$a = \omega : q^{n-1} = \frac{384}{2^{7}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a = \omega q - S \times \overline{q - 1} = 384 \times 2 - 765 \times \overline{2 - 1}$$
$$= 768 - 765 \times 1. = 3$$

$$a = S \times \overline{q - 1} : q^{n} - 1 = \frac{765}{255} = 3$$

$$\omega = a q^{n-1} = 3 \times 128 = 384.$$

$$\omega = (a + S \times \overline{q-1}) : q = (3 + 765 \times 1) : 2 = \frac{768}{2} = 384$$

$$\omega = (Sq - S) \times q^{n-1} : (q^{n} - 1) = \frac{97920}{255} = 384$$

$$q = \text{Log.} \frac{\omega}{a} : \overline{n-1} = \text{Log.} \frac{128}{7} = \frac{2{,}1072100}{7} = 0{,}3010300 = \text{Log. } 2.$$

$$q = (S - a) : (S - \omega) = \frac{762}{381} = 2$$

$$n = 1 + \text{Log.} \frac{\omega}{a} : \text{Log. } q. = 1 + \frac{2{,}1072100}{0{,}3010300} = 1 + 7 = 8.$$

$$n = 1 + \text{Log.} \frac{\omega}{\overline{S-q} \times \overline{S-\omega}} : \text{Log. } q. = 1 + \text{Log.} \frac{384}{765 - 2 \times \overline{765 - 384}} : \text{Log. } 2 = 1 + \text{Log.} \frac{384}{765 - 762} : \text{Log. } 2 = 1 + \text{Log.} \frac{128}{\text{Log. } 2.} = 1 + \frac{2{,}1072100}{0.3010300} = 1 + 7 = 8.$$

$$n = \text{Log.} (1 + S \times \frac{q-1}{a}) : \text{L.q.} = \text{L.} (1 + \frac{765}{3}) : \text{Log. } 2. = \text{Log.} \frac{256}{\text{Log. } 2} = \frac{2{,}4082400}{0{,}3010300} = 8$$

n =

$$n = 1 + \text{Log.}\,\frac{\omega}{a} : \text{Log.}\,\frac{S-a}{S-\omega} = 1 + \text{Log.}\ 128 :$$

$$\text{Log.}\ 2 = 1 + \frac{2,10721}{0,30103} = 1 + 7 = 8.$$

$$S = (\omega q - a) : (q - 1) = (384 \times 2 - 3) : 1$$
$$= 768 - 3 = 765$$

$$S = \frac{\omega}{q^{n-1}} \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{384}{128} \times 255 = 3 \times 255$$
$$= 765.$$

$$S = a \times (q^n - 1) : q - 1 = 3 \times 255 = 765$$

$$S = \frac{\omega \sqrt[n-1]{\omega} - a \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{\omega} - \sqrt[n-1]{a}} = \frac{384 \sqrt[7]{384} - 3 \sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{384} - \sqrt[7]{3}}$$

$$= \left(384 \times \frac{2,5843312}{7} - 3 \times \frac{0,4771213}{7}\right) : \frac{2,5843312}{7}$$
$$- \frac{0,4771213}{7} = \frac{384 \times 2 - 3 \times 1}{2 - 1} = 768 - 3$$
$$= 765$$

242. Ein Getreidkörnchen trägt in einem Jahre vier andere. Diese säet man wieder aus, und jedes trägt wieder vier. So fährt man 30 Jahre fort, daß allzeit das, was da ist, wieder ausgesäet wird. Wie viel wachsen das letzte Jahr Körnchen?

$a = 1$

$q = 4$

$n = 30.$ Formel, $\omega = aq^{n-1} = 4^{29}.$

 Man

Man müßte also 4 auf die 29ste Potenz erheben, welches eine langweilige Arbeit wäre. Aber sie läßt sich abkürzen; denn z. B. a^6 zur zweyten Potenz erhoben giebt a^{12} (§. 92. d). a^{12} zur zweyten Potenz erhoben, oder $a^{12 \times 2} = a^{24}$, und $a \times a^5 = a^{29}$ (§. 85. IIII. Reg.). Man darf also nur die sechste Potenz von 4 suchen, und diese mit sich selbst multipliciren, das ist, zum Quadrat erheben, so hat man die zwölfte; diese wieder mit sich selbst multiplicieren, so entsteht die 24ste; multiplicirt man diese mit der fünften Potenz von 4, die 29ste.

I.	II.	III.	IIII.	V.	VI.
4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

$4096 \times 4096 = 16777216$, und $16777216^2 = 281474976710656$. Dieses mit der fünften Potenz multiplicirt giebt die Anzahl der Körnchen im letzten Jahre, nemlich

288230376151711744.

Will man auch die Summe aller Körnchen vom ersten Jahre her finden, so ist jetzt, weil ω schon bekannt ist, die bequemste Formel $S = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, oder ω wird mit 4 multiplicirt, vom Producte 1 abgezogen, und der Rest mit 3 dividirt, da wird man finden

$S = 384307168202282325$ Körnchen.

Ein Schmied, der ein Pferd beschlagen soll, begehrt für den ersten Nagel (er braucht 32) 2 Pfenninge, für den zweyten 4, für den dritten 8, u. s. f. Wie viele Pfennige bekömmt er für alle 32 Nägel?

256 ist

256 ist die achte Potenz von 2, und 256^2 die sechszehnte, oder 65536. und 65536^2 die zwey und dreyßigste = 4294967296 = ω.

$$S = \frac{\omega q - a}{q - 1} = 8589934590 \text{ Pfenninge.}$$

Sessa, der Erfinder der Schachspieles, verlangte vom Könige Shehram zur Belohnung, er möchte ihm für das erste Feld ein, für das zweyte zwey, für das dritte vier Waizenkörner geben, und so im geometrischen Verhältniße fort. Das Schachbrett hat 64 Felder. Wie viele Waizenkörner hätte er bekommen?

$$\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18446740000000000000.$$

Wenn ein Karpf jährlich hundert Karpfen hervorbringt, keiner davon umkäme, und sie sich in diesem Verhältniße zehn Jahre fort vermehrten, wie viele Karpfen gäbe das?

1010101010101010101.

Anwendung
der geometrischen Proportionen, und Progressionen auf verschiedne Rechnungen.

143. Auf die Interusurien Rechnung. Interusurien heißt man die Zinse von Zinsen, wenn nemlich die Zinse, welche ein Kapital jährlich abwirft, wieder zum Kapital geschlagen, und verzinset werden. Sie werden auf folgende Art berechnet:

Das ausgelegte Kapital sey a, der Zins vom Hundert, c, sey, b. Also:

Kapital.	Zins.	Kapital	Zins.
c	: b ::	a	: $\frac{ab}{c}$.

Dieß ist der Zins für das erste Jahr vom Kapital a. Schlägt man ihn zum Kapital, so ist dieses nach dem ersten Jahre $a + \frac{ab}{c} = (1 + \frac{b}{c})\, a = A$. Dieses Kapital giebt fürs zweyte Jahr Zins $c : b :: A : \frac{bA}{c}$, und das Kapital ist am Ende des zweyten Jahres $A + \frac{Ab}{c} = (1 + \frac{b}{c})$ $A = (\frac{c+b}{c}) A = (\frac{c+b}{c} \times \frac{c+b}{c}) \times a = (\frac{c+b}{c})^2$ $a = B$. Dieß Kapital B giebt für das dritte Jahr Zins $\frac{bB}{c}$, und das Kapital mit dem Interresse ist nach dem Jahre $B + \frac{bB}{c} = (1 + \frac{b}{c}) B = (\frac{c+b}{c})\, B =$ $(\frac{c+b}{c} \times \frac{c+b}{c} \times \frac{c+b}{c})\, a. = (\frac{c+b}{c})^3 \times a$.

Und so, wenn die Zahl der Jahre, durch welche das Kapital auf Zinsen liegt, n ist, so ist nach Verlauf dieser Jahren Kapital und Zinsen zusammen $(\frac{c+b}{c})^n \times a$.

Z. B.

Z. B. Man lege 1000 fl. zu 5 Procent auf 10 Jahre aus, und schlage immer die Zinse zum Kapital, um Zinse von Zinsen zu erhalten. Wie groß wird das Kapital nach 10 Jahren seyn?

$a = 1000$
$b = 5$
$c = 100$

$$n = 10. \left(\frac{c+b}{c}\right)^n \times a = \left(\frac{105}{100}\right)^{10} \times 1000 =$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{10} \times 1000 = \frac{16679880978201000}{10240000000000} = 1628 \text{ fl.}$$

53 kr. 5 hell.

244. Auf Rabat, oder Disconto-Rechnung. Es giebt eine einfache, und eine zusammengesetzte Rechnung dieser Art. Die erste zeigt, wie viel einer bezahlen muß, wenn er ein Kapital, das erst nach einigen Jahren zu bezahlen wäre, jetzt gleich bezahlen will. Diese Rechnungsart ist schon (§. 153.) gezeigt worden. Wird aber auch berechnet, nicht nur was die jährlichen Zinse des Kapitals, sondern auch Zinse von Zinsen bis zur Zeit der Heimbezahlung betragen, so braucht man die zusammengesetzte Rabat, oder Disconto-Rechnung.

Es wird hier nur die im vorhergehenden §. befolgte Rechnungsart umgekehrt; denn wie das Kapital um eine gewisse Quantität anwachsen muß, wenn man Zinse von Zinsen nimmt, so muß es in der nemlichen Anzahl von Jahren um die nemliche Quantität abnehmen für

den,

den, der es heimbezahlt, weil der Gläubiger indessen das Kapital benützen, und Zinse von Zinsen nehmen kann. Und dann wird er, wann die Jahre verstrichen sind, gerade so viel haben, als er empfangen müßte, wenn ihn sein Schuldner jetzt erst bezahlte.

Wir haben in der vorhergehenden Aufgabe gefunden, daß nach einem Jahre aus dem Kapital a wird $(\frac{c+b}{c})a$. Wird also a gleich heimbezahlt, und an einen andern ausgelegt, so beträgt es vom 100, 5 fl. Folglich, wenn die Benennungen bleiben, wie zuvor

$$105 : 100 :: a : x$$

$$c+b : c :: a : \frac{ac}{c+b}.$$ So groß ist das Kapital nach dem ersten Jahre.

Nennet man $\frac{ac}{c+b}$, M, so wird das Kapital nach Ende des zweyten Jahres

$$c+b : c :: M : \frac{cM}{c+b} = \frac{c}{c+b} \times \frac{ac}{c+b} =$$

$$\frac{c^2 \times a}{c+b \times c+b} = (\frac{c}{c+b})^2 a = N.$$

In den Jahren n wird der Gläubiger haben $(\frac{c}{c+b})^n a.$

Z. B. Es soll Jemand in 10 Jahren 1628 fl. bezahlen, und will die Schuld jetzt gleich abtragen. Wie viel muß er bezahlen, damit der Gläubiger, wenn er

er das Heimbezahlte auslegt, und Zinse von Zinsen nimmt, nach 10 Jahren 1628 fl. habe?

$c = 100$
$b = 5$
$n = 10$

$$a = 1628. \quad \left(\frac{c}{c+b}\right)^n a = \left(\frac{100}{105}\right)^{10} \times 1628$$

$$= \frac{16660720000000000}{16679880978201} = 998 \text{ fl. } 51 \text{ kr. } 5 \text{ hell.}$$

a) Es sollte zwar, weil dieses Exempel gerade das Umgekehrte des vorhergehenden ist, gerade 1000 fl. herauskommen. Allein man darf nur bedenken, daß oben das Kapital nach 10 Jahren nicht genau 1628, sondern noch 53 kr. Heller sammt einem Bruch von Hellern war. Aber hier setzen wir eine kleinere Zahl für das heimzubezahlende Kapital. Also muß auch der Zins geringer ausfallen, und die heimzubezahlende Summe.

245. **Die Größe eines Kapitals nach einigen Jahren n zu bestimmen, wenn außer den Zinsen noch jährlich die Summe d zugelegt wird.**

Nach dem ersten Jahre, wenn alles übrige, wie §. 243, bleibt, wäre das Kapital sammt dem Zinse $\left(\frac{c+b}{c}\right)a$, und weil jetzt d hinzukömmt, wird es $\left(\frac{c+b}{c}\right)a + d$. Dieß nennen wir A.

Nach

Nach dem zweyten Jahre ist das Kapital sammt Zinsen von Zinsen $(\frac{c+b}{c})A+d$, weil wieder d hinzukömmt, oder $\frac{c+b}{c}\left((\frac{c+b}{c})a+d\right)+d=$ $(\frac{c+b}{c})^2 a+(\frac{c+b}{c})d+d=B.$

Nach dem dritten Jahre $(\frac{c+b}{c})B+d=$ $(\frac{c+b}{c})^3 a+(\frac{c+b}{c})^2 d+(\frac{c+b}{c})d+d$, und nach dem n^{ten} Jahre $(\frac{c+b}{c})^n a+(\frac{c+b}{c})^{n-1} d+$ $(\frac{c+b}{c})^{n-2} d \ldots\ldots+(\frac{c+b}{c})d+d.$

Diese Formel, so weitläuftig sie scheint, läßt sich abkürzen; denn sie besteht aus einer geometrischen Progression, wovon man das erste Glied d, den Quotienten $\frac{c+b}{c}$, und n, die Zahl der Glieder weis, und noch aus $(\frac{c+b}{c})^n a$. Es ist aber in der Progression

$$S=\frac{aq^n-1}{q-1}, \text{ oder hier}=\frac{d\times(\frac{c+b}{c})^n-1}{\frac{c+b}{c}-1}=$$

((c+b

$\left(\left(\frac{c+b}{c}\right)^n c - c\right) d$. Also ist die ganze Summe

$$\left(\frac{c+b}{c}\right)^n \times \frac{ab+cd}{b} - \frac{cd}{b}.$$

Es sey, wie §. 243, $a = 1000$, $b = 5$, $c = 100$, $n = 10$, $d = 100$, oder alle Jahre werden 100 fl. zum Kapital gelegt, so ist die Summe nach 10 Jahren

$$\frac{16679880978201}{10240000000000} \times \frac{5000+10000}{5} - \frac{10000}{5} = 2886\tfrac{7002934603}{10240000000}$$

246. Würde alle Jahre etwas Gewisses vom Kapital hinweggenommen, oder das Gegentheil der vorigen Aufgabe, so müßte auch von $\left(\frac{c+b}{c}\right)^n a$ die Summe der ersagten geometrischen Progression abgezogen werden, und im n^{ten} Jahre würde das Kapital seyn

$$\frac{\left(\frac{c+b}{c}\right)^n \times \overline{ab - cd} + cd}{b}.$$

In unserm Falle, wenn alle Jahre 100 fl. wegkämen, würden von 1000 fl. am Ende des zehnten Jahres noch 372 fl. übrig seyn. Die Brüche sind bey dieser Rechnung vernachläßiget worden.

Aber wann würde das Kapital gar verschwinden? Nemlich alsdann, wann die obige Formel

$$\frac{\left(\frac{c+b}{c}\right)^n \times \overline{ab - cd} + cd}{b} = 0$$

ist, oder wenn

(c+d)

$\frac{(\frac{c+b}{c})^n \times \overline{ab-cd}}{b}$ und $\frac{cd}{c}$ einander aufheben, oder beyde Größen entgegengesetzte Zeichen bekommen. Nun ist $\frac{cd}{b}$ positiv. Also muß der andere Theil negativ werden, und weil $(\frac{c+b}{c})^n$ positiv bleibt, muß der Factor $\frac{ab-cd}{b}$ negativ werden, d. i. es muß cd größer, als ab, werden. Man schreibe also den ersten Theil so:

$$\frac{(\frac{c+b}{c})^n \times -(cd-ab)}{b} = -\frac{(\frac{c+b}{c})^n \times \overline{cd-ab}}{b}$$

$$= \frac{cd}{b}, \ (\frac{c+b}{c})^n = \frac{cd}{cd-ab}.$$ Rechnet man mit Logarithmen, so ist Log. $n\ (\frac{c+b}{c}) =$ Log. $\frac{cd}{cd-ab}$. n $=$ Log. $\frac{cd}{cd-ab}$: Log. $(\frac{c+b}{c})$. In unserm Beyspiele wird man finden, daß das Kapital in vierzehn $\frac{143798}{211893}$ Jahren verschwinde.

247. Giebt man aber a, das Kapital, b, c, wie oben, und n, die Anzahl der Jahre, in welchen das Kapital verschwinden soll, und fragt, wie viel jedes Jahr alsdann vom Kapital genommen werden dürfe, so hat man d zu suchen.

Die

Die obige Formel ist $(\frac{c+b}{c})^n \times (ab - cd)$

$+ cd = o, \frac{(c+b)^n}{c^n} \times ab = \frac{(c+b)^n}{c^n} \times cd - cd.$

oder wenn man alles mit c^n multiplicirt, und mit $(c+b)^n$

alles dividirt, $ab = cd - \frac{c^n}{(c+b)^n} \times cd, =$

$(c - \frac{c^{n+1}}{(c+b)^n}) d$, folglich $d = \frac{ab}{c - \frac{c^{n+1}}{(c+b)^n}}$

Rechnet man durch Logarithmen, so ist $\frac{100^{15}}{105^{14}}$

$$= - \begin{array}{l} 30.0000000 \\ 28.2966502 \\ \hline 1.7033498 \end{array} = \text{Log. } 50.$$

Also 100 — 50 = 50, und ab, oder $\frac{5000}{50} =$ 100, das ist, wenn man 1000 fl. zu 5 Procent auslegt, Zinse von Zinsen nimmt, und doch das Kapital in 14 Jahren verschwinden soll, so müssen alle Jahre 100 davon genommen werden.

Rechnungen von der Art, wie ich sie von §. 243 her angeführt habe, sind sehr verwickelt, und ich finde es gar nicht für rathsam, Anfänger damit zu plagen, wenn sie nicht besondere Lust dazu zeigen. Sind sie einmal recht fest, kann man sie darauf verweisen, weil sie doch bey Berechnung der Zeit und Leibrenten, Wittwenpensionen, u. s. w. gebraucht werden. Allein da-

bey müssen noch mehrer Umstände in Anschlag kommen. Man hat sich also in solchen Fällen in andern Büchern noch weiter Rathes zu erholen, z. B. in der juridischen, und politischen Rechenkunst des Herrn von Florencourt. Altenburg 1781. Tetens, Einleitung zur Rechnung der Leibrenten. Leipz. 1785.

248. Eine Größe, a, nimmt jährlich um $\frac{ab}{c}$ zu, und um $\frac{am}{c}$ ab. Wie groß wird sie nach den Jahren n seyn?

Nach dem ersten Jahre ist sie $a + \frac{ab}{c} - \frac{am}{c}$ $= (1 + \frac{b-m}{c}) \times a = (\frac{c+b-m}{c})\, a = A.$

Am Ende des zweyten Jahres ist sie $(\frac{c+b-m}{c})$ $\times A = (\frac{c+b-m}{c}) \times a \times (\frac{c+b-m}{c}) =$ $(\frac{c+b-m}{c})^2 \times a.$

Es sey die Volksmenge eines Landes 100000. Nach einem Durchschnitte von 50 Jahren hat man gefunden, daß die Lebenden zu den Gebohrnen sich verhalten, wie $175 : 8 = c : b$. und die Lebenden zu den Verstorbenen, wie $175 : 5 = c : m$. Weil nun hier mehr gebohren werden, als sterben, fragt sichs, um wie viel die Bevölke:

völkerung des Landes zugenommen habe, oder wie ſtark das Land nach 50 Jahren bevölkert ſey?

Nach der Formel iſt $\left(\frac{175+8-5}{175}\right)^{50} = \left(\frac{178}{175}\right)^{50}$. Multiplicirt man dieß mit $a = 100000$, ſo iſt die Formel $\left(\frac{178}{175}\right)^{50} \times 100000$. Wird mit Logarithmen gerechnet

$$50 \times \text{Log.} \frac{178}{175} + 100000$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } 178 = & 2{,}2504200 \\ -\text{Log. } 175 = & 2{,}2430380 \\ \hline & 0{,}0073820 \\ \times 50 & 50 \\ \hline & 0{,}3691000 \\ +\text{Log. } 100000 & 5{,}0000000 \\ \hline & 5{,}3691000 = 233937 \end{array}$$

So ſtark iſt die Bevölkerung nach 50 Jahren.

Anwendung der Lehre von den Proportionen auf die Phyſik, und Mathematik.

149. In der Phyſik braucht man die Lehre von Proportionen faſt alle Augenblicke, wenn man die Kräfte, Geſchwindigkeiten, durchloſſenen Räume, Schwere ꝛc. mehrer Körper miteinander vergleichen will. Man verfährt dabey ſo, wie wenn ich z. B. berechnen wollte, wie viele Vierundzwainziger 7 Conventionstha-

ler ausmachen. Ein Conventionsthaler verhält sich zu einem Vierundzwainziger, wie 6 : 1, oder 6 Vierundzwainziger machen einen Conventionsthaler. Man setzt dieses so an:

C.	24ger		C	24ger
1 :	6	::	7 :	42.

Das heißt, man setzt das allgemeine Verhältniß zweyer Dinge voraus, und berechnet daraus die wirkliche Größe, oder Quantität zweyer Dinge dieser Art, z. B. Man weis, der Inhalt eines Cylinders verhalte sich überhaupt zu einer Kugel vom nemlichen Diameter, wie 3 : 2, und man hätte einen Cylinder von 30 Cubikschuhen. Wie viele Cubikschuhe würde eine Kugel vom nemlichen Durchmesser erhalten? Nemlich 3 : 2 :: 30 : 20.

250. Man drückt das Verhältniß zweyer Dinge wie eine Gleichung aus. Z. B. Wenn ich sagen will: Der Raum, den ein Körper durchläuft, verhalte sich wie seine Geschwindigkeit, oder je geschwinder der Körper sich bewege, desto mehr Raum durchlaufe er, und je langsamer er sich bewege, desto weniger, und wenn der Raum S, die Geschwindigkeit C genannt wird, so schreibt man dieß so: $S = C$.

a) Das Zeichen = bedeutet also hier nicht **Gleichheit der Dinge**, sondern **Gleichheit ihres Verhältnisses**, denn der durchloffene Raum kann nicht der Geschwindigkeit gleich seyn, wohl aber verhält er sich, wie die Geschwindigkeit, wächst, und nimmt ab, wie sie:

b) Man

b) Man kann auf diese Art mehrere Dinge der nemlichen Art miteinander vergleichen, z. B. zween Räume, und zwo Geschwindigkeiten. S : s : : C : c.

c) Stehen zwey Dinge in einem umgekehrten Verhältniß miteinander, d. i., wenn eines abnimmt, wie das andere wächst, oder wächst, wie das andere abnimmt, so schreibt man eine Größe, wie einen Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner die Größe selbst ist (§. 200 b). Z. B. Ein Körper hat eine desto größere Geschwindigkeit, je weniger er Zeit braucht, hundert Schuhe zu durchlaufen, und eine desto kleinere Geschwindigkeit, je mehr Zeit er braucht den nemlichen Raum zu durchlaufen. Wie also die Zeit wächst, nimmt die Geschwindigkeit ab, und umgekehrt, oder Zeit und Geschwindigkeit stehen im umgekehrten Verhältnisse. Heißt die Zeit T, so ist $C = \frac{1}{T}$, oder $T = \frac{1}{C}$, und man spricht das so aus: **Die Zeit verhält sich umgekehrt, wie die Geschwindigkeit, oder die Geschwindigkeit umgekehrt, wie die Zeit.**

d) Man kann also auch mehrere Dinge von der nemlichen Art so miteinander vergleichen, z. B. C : c : : $\frac{1}{T} : \frac{1}{t}$.

251. **Jede Proportion läßt sich wie eine Gleichung, und jede Gleichung, wie eine Proportion ausdrücken.**

Beweis des ersten. In jeder geraden Proportion ist das Product der äußern Glieder dem Product der mittern gleich. Drückt man dieses algebraisch aus, so hat man eine Gleichung. z. B.: a : b : : c : d, also $a \times d = b \times c$, oder $ad = bc$.

Beweis des zweyten. Es sey $ab = cd$, so kann man aus den Factoren der ersten Seite, a, b, der Gleichung die zwey äußern, aus den Factoren der andern Seite b, c, die zwey mittern Glieder machen, nemlich $a : b :: c : d$; denn das Product der äußern Glieder ist dem Product der mittern gleich, welches eine Eigenschaft der geometrischen Proportion ist (§. 216.).

a) Auf diese Art kann jede Gleichung in eine Proportion aufgelöst werden.

$x^2 = ab$, oder $a : x :: x : b$.

$x = ab$, oder $a : 1 :: x : b$.

$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$, oder $bc = ad$, und $b : a :: d : c$

$\frac{1}{T} = C$, oder $1 = TC$, und $1 : T :: C : 1$

b) Es können auch, wenn man eine Proportion in eine Gleichung verwandelt, verschiedne Lehrsätze daraus abgeleitet werden. Wir wollen einen Lehrsatz vor uns nehmen. Ein Körper durchläuft einen desto größern Raum, je geschwinder er sich beweget, und je längere Zeit seine Bewegung dauert. Dieß drückt man so aus: $S = CT$, oder der Raum ist in einem zusammen gesetzten Verhältniß mit Geschwindigkeit und Zeit. Es sey noch ein anderer Körper, dessen durchloffener Raum s, die Geschwindigkeit c, die Zeit der Bewegung t ist. Also

$S : s :: CT : ct.$

$Sct = sCT. - C : c :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}.$

Daraus fließen folgende Lehrsätze, wenn $S = s$

$ct = CT.$

$c : C :: T : t$, oder $c : C :: \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$

Die

Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt, wie die Zeiten der Bewegung.

Wenn $c = C$ - - $St = sT$.
$S : s :: T : t$

Wenn $T = t$ - - $Sc = sC$.
$S : s :: C : c$.

Man lehre Anfänger verschiedne solche Formeln von der gleichförmigen, oder beschleunigten Bewegung zu behandeln, und lasse sie selbige in Ziffern auflösen, und mit Worten ausdrücken. Zur Uebung sind von der beschleunigten Bewegung $S = T^2 = C^2$. Die Dichtigkeit eines Körpers ist im zusammen gesetzten Verhältniß seiner Masse gerade, und seines Volumens umgekehrt oder $D = \frac{M}{V}$. Die Schwere eines Körpers, der sich um einen Mittelpunkt bewegt, gegen den er schwer ist, ist umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernung von diesem Mittelpunkt, oder $G = \frac{1}{R^2}$. Also bey zween Körpern $G : g :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$, oder $G \times \frac{1}{r^2} = g \times \frac{1}{R^2}$, oder $GR^2 = gr^2$, und $G : g :: r^2 : R^2$.

252. Die Höhe eines Thurmes, oder Tiefe eines Brunnens durch den Fall eines Steines zu messen.

Aus der Physik ist bekannt, daß ein Stein mit beschleunigter Bewegung falle, in der ersten Secunde 15, in der zweyten 45, in der dritten 75, u. s. w. Setzen wir nun, ein Stein habe 6 Secunden, oder Pulsschläge gebraucht, bis er auf den Boden kam, so läßt sich die Höhe des Thurmes, oder Tiefe des Brunnens

 daraus

daraus berechnen; denn in der beschleunigten Bewegung sind die durchloffenen Räume wie die Quadrate der Zeiten ihrer Bewegung, oder

$t^2 : T^2 :: s : S$. Ein Körper macht in der Zeit $t = 1$, 15 Schuhe, wie viele wird er in der Zeit 6 machen, oder

$1 : 36 :: 15 : 540$ Schuhe. So hoch ist der Thurm, oder so tief der Brunnen.

Weil $G : g :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$, oder die Schweren zweener Körper sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte, so läßt sich auch berechnen, wie schwer ein Körper seyn würde, wenn er 60mal so weit vom Mittelpunkt der Erde entfernet wäre, als er itzt entfernet ist. Die Schwere nimmt ab, wie das Quadrat der Entfernung wächset. Ein Stein auf unsrer Erde, der also nur einen halben Durchmesser vom Mittelpunkt der Erde entfernet ist, macht nach seiner Schwere, wenn er fällt, 15 Schuhe in einer Secunde. Wie viele wird er seiner Schwere gemäß machen, wenn er 60 Halbmesser der Erde entfernet wäre?

$$G : g :: r^2 : R^2$$

oder $R^2 : r^2 :: g : G$

$$60^2 : 1^2 :: 15 : \frac{15}{3600} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240}$$

Also würde ein Stein, der hier in einer Secunde 15 Schuh macht, in einer sechzigmal größern Entfernung in der nemlichen Zeit nur $\frac{1}{240}$ Schuh machen, oder $\frac{3}{5}$ einer Linie.

Wollte

Wollte ich nun auch wissen, wie viele Zeit so ein entfernter Körper brauchte 15 Schuhe zu machen, wie er sie auf der Erde in einer Secunde macht, so dient die Formel, die man in der Physik von der beschleunigten Bewegung hat, $S = T^2$, oder daß die Räume sich verhalten, wie die Quadrate der Zeiten.

$$S : s :: T^2 : t^2$$

Lin. Lin.

$\frac{3}{5} : 2160 : 1^2 : x^2 = 3600$, wovon die Quadratwurzel 60 ist.

In dieser Entfernung brauchte also ein Körper 60 Secunden, oder eine Minute um 15 Schuhe im Fallen zu machen. Der Mond ist aber in seinem mittlern Abstande 60 halbe Erdmesser von uns entfernt. Wenn also er eine Schwere gegen die Erde hat, würde er sich derselben in einer Minute um 15 Schuhe nähern, und so mit immer beschleunigter Bewegung fortfallen, wenn ihn nicht etwas zurückhielte, bis er die Erde erreichte. Man könnte nun auch fragen, wie lange würde der Mond auf diese Art brauchen, bis er den Mittelpunkt der Erde erreichte? Setzet man, der halbe Durchmesser der Erde enthalte 430 Meilen, und eine Meile 24000 Schuhe, so haben 60 halbe Durchmessen 619200000 Schuhe, oder 89164800000 Linien.

Nun ist, weil $S : s :: T^2 : t^2$.

$$\sqrt{S} : \sqrt{s} :: T : t. \text{ oder}$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{5}} : \sqrt{89164800000} :: 1 \text{ Minut.} : t.$$

$0{,}2448 : 298604 :: 1 : 121$ Minuten beynahe, oder der Mond würde beynahe in zwo Stunden den Mittelpunkt der Erde erreichen.

Die

Die Stärke des Lichtes nimmt ab, wie das Quadrat der Entfernung vom Lichte wächst, wie aus der Physik und Geometrie erwiesen wird. Wenn ich also bey einer Entfernung von 8 Schuhen vom Kerzenlichte gerade noch lesen kann, wie viele Kerzenlichter brauche ich, wenn ich in einer Entfernung von 16 Schuhen lesen will?

$$8^2 : 16^2 :: 1 : x$$
$$64 : 156 :: 1 : \frac{256}{64} = 4 \text{ Lichter.}$$

Man sieht aus diesen wenigen Beyspielen, wie nothwendig nicht nur die gesammte reine Mathematik, sondern vorzüglich die Lehre von Proportionen zur Physik ist, und wie fleißig man sich darinn üben muß, wenn man die darinn vorkommenden Wahrheiten verstehen, und nicht bloß nachbethen, und auswendig lernen will.

Fünfter Abschnitt.

Etwas von den Reihen, und ihrer Summirung.

253. Wenn mehrere Glieder nach einem gewissen Gesetze aufeinander folgen, so nennet man sie zusammen eine Reihe. So ist eine arithmethische, oder geometrische Progression eine Reihe, weil alle Glieder die nemliche Differenz haben, oder überall der nemliche Exponent heraus kömmt. Bey Verwandlung einiger gemeinen in Decimalbrüche haben wir auch gesehen, daß bey Fortsetzung der Division die nemliche Quotienten

ten nach einem gewissen Gesetze wieder kommen (§. 71) und also eine Reihe ausmachen. Andere Beyspiele von Reihen hat man (§. 88.)

a) Werden die folgenden Glieder immer größer, als die vorhergehenden, so heißt die Reihe eine **steigende**, werden sie kleiner, eine **fallende**.

Es ist hier nicht möglich, die Lehre von den Reihen ausführlich abzuhandeln. Ich will also nur das Nothwendigste berühren, was in Anfangsgründe gehört, und zeigen, wie man alle Glieder einer Reihe **summirt**, oder in eine Summe bringt.

254. Reihen, die aus **unendlich vielen**, aber immer geometrisch abnehmenden Gliedern bestehen, lassen sich summiren; denn wir haben für die Summe S eine Formel, in welcher n, die Anzahl der Glieder nicht vorkömmt, nemlich $S = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ (§. 240.). Ich weis das erste Glied a, den Exponenten q, und brauche nur noch das letzte Glied ω. Allein wie finde ich in einer **unendlichen Reihe** das letzte Glied?

Ich antworte, dieses letzte Glied sey in einer unendlichen Reihe nichts Wirkliches, sondern nur etwas Eingebildetes, und könne also gar weggelassen werden, und man erhalte nichtsdestoweniger die **wahre Summe**. Man nehme drey Glieder einer geometrisch fallenden Reihe $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$. Zu diesen kann man durch die Regel Detri das vierte, $\frac{1}{16}$, finden, zu $\frac{1}{8} : \frac{1}{16}$ in einer stetten Proportion findt man $\frac{1}{32}$, zu $\frac{1}{16} : \frac{1}{32}$ findt man $\frac{1}{64}$ und

und so fort ins unendliche. Suche ich auf diese Art immer zu den zwey vorhergehenden Gliedern das dritte, so wird dieses zwar immer halb so klein als das vorhergehende seyn; aber doch etwas Wirkliches bleiben. Also läßt sich eine Größe ins unendliche fort verkleinern, oder man kömmt mit ihrer Verkleinerung niemal an ein Ende, daß man sagen könnte, jetzt läßt sich diese Größe nicht mehr verkleinern, oder es läßt sich keine Größe denken, die kleiner wäre, als diese. Wenn ich mir aber einbilde, diese Größe sey durch unendlich viele Verkleinerungen endlich so klein geworden, daß sich keine andere Größe mehr denken ließe, die noch kleiner wäre, so bilde ich mir etwas unendlich Kleines ein. So etwas unendlich Kleines darf ich aber ohne einen Fehler in der Rechnung weglassen; denn wenn ich durch die Weglassung noch einen Fehler begienge, so müßte sich dieser Fehler, so gering er auch wäre, durch einen Bruch ausdrücken lassen, und ich könnte gleich einen andern Bruch denken, der nur halb so groß als jener wäre, folglich wäre gegen die Voraussetzung der weggelassene Bruch noch nicht unendlich klein.

Das Zeichen eines unendlich Kleinen ist $\frac{1}{\infty}$, und eines unendlich Großen ∞. Beydes kann es nicht wirklich geben; weil wir allzeit noch eine Größe finden können, die größer, oder kleiner ist, als jede gegebene. Aber wenn es möglich wäre, mit einer gegebenen Größe alle mögliche Vergrößerungen, oder Verkleinerungen vor=

vorzunehmen, so würde man etwas unendlich Großes, oder Kleines erhalten. Indessen ist beydes nur etwas Eingebildetes. Wer verlangt, man soll eine unendliche Reihe abnehmender Brüche summiren, der setzt schon voraus, das erste Glied dieser Reihe, oder der erste Bruch habe schon alle mögliche Verkleinerungen erlitten; sonst wäre das letzte Glied der Reihe noch nicht unendlich klein, und die Reihe selbst nicht unendlich.

255. Es wird also, wenn das letzte Glied $\frac{1}{\infty}$ ist, aus der Formel, $S = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, weil $\frac{1}{\infty} = 0$ ist, $S = \frac{-a}{q-1}$; denn ωq, oder $0 \times q$ verschwindet. Oder wenn man alle Zeichen des Zählers und Nenners dieses Bruches verändert, $\frac{a}{1-q}$. Man summire jetzt folgende Reihen nach dieser Formel:

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} \text{ - - - } \frac{1}{\infty} . \ a = \frac{1}{2} . \ q = \frac{1}{2} . \ S = 1$

$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} : \frac{1}{12} : \frac{1}{24} : \frac{1}{48} \text{ - - - } \frac{1}{\infty} . \ a = \frac{1}{3} . \ q = \frac{1}{2} . \ S = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \frac{1}{143} \text{ - - - } \frac{1}{\infty} . \ a = \frac{1}{3} . \ q = \frac{1}{3} . \ S = \frac{1}{2}$

a) Hieraus läßt sich der bekannte Trugschluß des Zeno leicht wiederlegen, mit dem er die Möglichkeit der Bewegung bestreiten wollte. Wenn einer auch nur zehn Schritte hinter einer Schildkröte wäre, und beyde sich zugleich vorwärts bewegten, sagte Zeno, könnte er diese doch niemals erreichen; denn wenn man setzt, die Geschwindigkeit des Menschen sey zehnmal so groß, als jene der Schildkröte, so würde, bis jener zehn Schritte gemacht hätte

hätte, diese um einen Schritt fort gerückt seyn. Bis der Mensch wieder diesen Schritt gemacht hätte, wäre diese wieder $\frac{1}{10}$ eines Schrittes voraus, und so immer um den zehnten Theil des Weges, den der Mensch mit ihr zu gleicher Zeit machte. Hier sind die Wege, die der Mensch und die Schildkrötte zu gleicher Zeit machen, in Schritten.

Mensch 10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
Schildk. voraus.	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$ u. s. f.

Es scheint also, daß der Mensch niemal die Schildkrötte erreichen würde. Wäre die Reihe, welche den Weg der Schildkrötte ausdrückt, nicht zu summiren, dann hätte Zeno Recht gehabt; aber man kann sie summiren, und findt eine endliche Summe; denn $S = \frac{a}{1-q}$

$$1 : \tfrac{1}{10} : \tfrac{1}{100} : \tfrac{1}{1000} \dots \tfrac{1}{\infty} . \; a = 1, \; q = \tfrac{1}{10}.$$

Folglich $\frac{a}{1-q} = 1 : 1 - \frac{1}{10} = 1 : \frac{9}{10} = \frac{1 \times 10}{9}$ $= 1\frac{1}{9}$. Also hat der Mensch die Schildkrötte schon erreichet, wenn sie $1\frac{1}{9}$ Schritt gemacht hat. Man kann diese Aufgabe auch nach (§. 152.) auflösen.

b) Der Decimalbruch, 0,111 ꝛc. ist so viel, als $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ ꝛc. und $\frac{1}{9}$ als Decimalbruch ausgedückt, ist 0, 111 ꝛc. Also ist $1 + 0,111$ ꝛc. so viel als $1 + \frac{1}{9}$. Folglich sieht man wieder, daß Zeno sich geirret, und daß $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ ꝛc. doch nicht mehr sey, als $1 + \frac{1}{9}$

256. Eine Reihe von Brüchen summiren, derer Zähler in arithmetischer, die Nenner aber in geometrischer Proportion wachsen, wie $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{12}, \frac{5}{24}, \frac{6}{48}, \dots$ oder $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3} \dots$

Man

Man schreibe sie zuerst theilweise.

$$\frac{2}{3},\ \overbrace{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}^{3},\ \overbrace{\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}^{4},\ \overbrace{\frac{2}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}}^{5}$$

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{bq}+\frac{d}{bq},\ \frac{a}{bq^2}+\frac{d}{bq^2}+\frac{d}{bq^2},\ \frac{a}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}$$

Auf diese Art wird die gegebene Reihe in mehrere kleine zerlegt. Jede dieser Reihen summirt man besonders, und addirt dann alle Partialsummen in eine einzige zusammen.

$$\frac{2}{3},\ \frac{2}{6},\ \frac{2}{12},\ \frac{2}{24}\ \ldots\ \frac{2}{\infty}\ \text{Summe}\ 1\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{24}\ \ldots\ \frac{1}{\infty}\ ----\ \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{24}\ \ldots\ \frac{1}{\infty}\ ----\ \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{24}\ \ldots\ \frac{1}{\infty}\ ----\ \frac{1}{12}$$

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{bq},\ \frac{a}{bq^2},\ \frac{a}{bq^3}\ \ldots\ \frac{a}{bq^\infty}\ \text{Summe}\ \frac{aq}{bq-b}\ ^*$$

$$\frac{d}{bq},\ \frac{d}{bq^2},\ \frac{d}{bq^3}\ \ldots\ \frac{d}{bq^\infty}\ ----\ \frac{d}{bq-b}$$

$$\frac{d}{bq^2},\ \frac{d}{bq^3}\ \ldots\ \frac{d}{bq^\infty}\ ----\ \frac{d}{bq^2-bq}$$

$$\frac{d}{bq^3}\ \ldots\ \frac{d}{bq^\infty}\ ----\ \frac{d}{bq^3-bq^2}$$

a) Die ganze Summe bey den Zahlenbrüchen wäre also $1\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$ ꝛc. Die Partialsummen, das erste Glied, $1\frac{1}{3}$, ausgeschlossen machen wieder eine geometrische Reihe $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}:\frac{1}{12},\ \frac{1}{24}$ ꝛc. aus, wo $a=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{2}$. Also ist $S=\frac{a}{1-q}=\frac{2}{3}$, und nun das ausgeschlossene Glied, $1\frac{1}{3}$, dazu addirt, oder $1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=2$.

b) Von

* Weil hier $a=\frac{a}{b}$, $q=\frac{1}{q}$

b) Von den algebraischen Brüchen gilt das nemliche. Die Partialsummen sind $\frac{aq}{bq-b} + \frac{d}{bq-b} + \frac{d}{bq^2-bq} + \frac{d}{bq^3-bq^2}$ rc. Läßt man indessen das erste Glied, $\frac{aq}{bq-b}$ weg, so machen die übrigen eine geometrische Reihe von Brüchen. Hier ist in der Formel $\frac{a}{1-q}$, $a = \frac{d}{bq-b}$ $q = \frac{1}{q}$, folglich die Summe $\frac{d}{bq-b} : \frac{q-1}{b} = \frac{dq}{bq^2-2bq+b}$. Addirt man auch das weggelassene Glied dazu, so ist die ganze Summe $\frac{aq}{bq-b} + \frac{dq}{bq^2-2bq+b} = \frac{aq\times(q-1)+dq}{b\times(q-1)^2}$.

257. Andere Reihen, die nicht im Nenner, und Zähler zugleich in geometrischer, und arithmetischer Progression fortlaufen, oder deren Zähler nicht immer der nemliche bleibt, lassen sich nicht genau summiren, sondern man befriedigt sich, wenn man ihre Summe nur beynahe findt. Dieß geschieht, wenn die Reihe schnell convergirend gemacht, oder der Nenner in Ansehung des Zählers merklich größer angenommen wird. Alsdann nimmt der Werth der folgenden Brüche schnell ab, und man begeht keinen merklichen Fehler, wenn man einige der folgenden Glieder gar weg läßt, und nur die Summe der ersten suchet.

Z. B. Man habe $\sqrt{(a^2+x^2)}$ gesucht, und durch Annäherung gefunden $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$ ꝛc. Hier kann man schon das letzte, und also noch vielmehr alle folgende Glieder weglassen, weil ihr Werth sehr klein ist. Es sey $\sqrt{(a^2+x^2)} = \sqrt{101}$. Wird $a = 10$, $x = 1$ angenommen, also $a^2 + x^2 = 100 + 1$, so bekommen wir für $\sqrt{101}$ folgende Reihe

$$10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000}.$$

Das letzte Glied giebt schon Milliontheilchen der Wurzel. Behält man nun die drey ersten Glieder der Wurzel, und addirt sie, so bekömmt man $10 + \frac{400}{8000} - \frac{1}{8000} = 10 + \frac{399}{8000}$, welches gar oft hinlänglich ist.

258. Bisher haben wir nur von abnehmenden Reihen geredet. Nun auch etwas von wachsenden Reihen, aber nur für besondere Fälle. Z. B. Man soll die Summe der wachsenden Potenzen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. ꝛc. finden.

Jede folgende Zahl ist um 1 größer, als die vorhergehende. Es seyn die wachsenden Zahlen

$l, m, n, p, q, r,$

$2, 3, 4, 5, 6, 7.$ Also ist

$r = q + 1$	$7 = 6 + 1$
$q = p + 1$	$6 = 5 + 1$
$p = n + 1$	$5 = 4 + 1$
$n = m + 1$	$4 = 3 + 1$
$m = l + 1$	$3 = 2 + 1$

 $r^2 =$

$$r^2 = q^2 + 2q + 1$$
$$q^2 = p^2 + 2p + 1$$
$$p^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$n^2 = m^2 + 2m + 1$$
$$m^2 = l^2 + 2l + 1$$

$$7^2 = 6^2 + 2 \times 6 + 1$$
$$6^2 = 5^2 + 2 \times 5 + 1$$
$$5^2 = 4^2 + 2 \times 4 + 1$$
$$4^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$$
$$3^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$$

$$r^3 = q^3 + 3q^2 + 3q + 1$$
$$q^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$$
$$p^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
$$n^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$$
$$m^3 = l^3 + 3l^2 + 3l + 1$$

$$7^3 = 6^3 + 3 \times 6^2 + 3 \times 6 + 1$$
$$6^3 = 5^3 + 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1$$
$$5^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$$
$$4^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$r^4 = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1$$
$$q^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$$
$$p^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$
$$n^4 = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$
$$m^4 = l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1$$

$$7^4 = 6^4 + 4 \times 6^3 + 6 \times 6^2 + 4 \times 6 + 1$$
$$6^4 = 5^4 + 4 \times 5^3 + 6 \times 5^2 + 4 \times 5 + 1$$
$$5^4 = 4^4 + 4 \times 4^3 + 6 \times 4^2 + 4 \times 4 + 1$$
$$4^4 = 3^4 + 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$$
$$3^4 = 2^4 + 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$$

Es ist also $r^2 = q^2 + 2q + 1$, oder weil $q^2 = p^2 + 2p + 1$, so ist $r^2 = 2q + 1 + p^2 + 2p + 1$,

oder

oder weil $p^2 = n^2 + 2n + 1$, so ist $r^2 = 2q + 1 + 2p + 1 + n^2 + 2n + 1$, und weil wieder $n^2 = m^2 + 2m + 1$, so ist $r^2 = 2q + 1 + 2p + 1 + 2n + 1 + m^2 + 2m + 1$, und weil endlich $m^2 = l^2 + 2l + 1$, so ist

$$\begin{aligned} r^2 = &+ 2q + 1 \\ &+ 2p + 1 \\ &+ 2n + 1 \\ &+ 2m + 1 \\ l^2 &+ 2l + 1 \end{aligned} \qquad \text{eben so} \qquad \begin{aligned} 7^2 = &+ 2\times 6 + 1 \\ &+ 2\times 5 + 1 \\ &+ 2\times 4 + 1 \\ &+ 2\times 3 + 1 \\ 2^2 &+ 2\times 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^3 = &+ 3q^2 + 3q + 1 \\ &+ 3p^2 + 3p + 1 \\ &+ 3n^2 + 3n + 1 \\ &+ 3m^2 + 3m + 1 \\ l^3 &+ 3l^2 + 3l + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 7^3 = &+ 3\times 6^2 + 3\times 6 + 1 \\ &+ 3\times 5^2 + 3\times 5 + 1 \\ &+ 3\times 4^2 + 3\times 4 + 1 \\ &+ 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1 \\ 2^3 &+ 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^4 = &+ 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1 \\ &+ 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\ &+ 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ &+ 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\ l^4 &+ 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^4 = &+ 4\times 6^3 + 6\times 6^2 + 4\times 6 + 1 \\ &+ 4\times 5^3 + 6\times 5^2 + 4\times 5 + 1 \\ &+ 4\times 4^3 + 6\times 4^2 + 4\times 4 + 1 \\ &+ 4\times 3^3 + 6\times 3^2 + 4\times 3 + 1 \\ 2^4 &+ 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1 \end{aligned}$$

Folglich in einer Reihe Quadrate der in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen ist das letzte Quadrat gleich dem Quadrate der ersten Zahl (hier l^2, oder 2^2) und der doppelten Summe aller vor der letzten hergehenden Zahl ($2q$, $2p$, $2n$, $2m$, $2l$ oder

 2×6,

2×6, 2×5, 2×4, 2×3, 2×2) und so vielen Einheiten, als Zahlen vor der letzten hergehen (1×5). Das Gesetz für die dritte, oder vierte Potenz kann man nach den gefundenen Formeln eben so mit Worten ausdrücken.

Daraus läßt sich nun die Summe der Quadrate, dritten und vierten Potenzen ꝛc. derer Wurzeln in natürlicher Ordnung aufeinander folgen, leicht finden. Es sey die erste Zahl a, die letzte ω. Die Zahl aller Glieder von den letzten, $\omega - a$. Die Summe aller Glieder heiße S, ihrer Quadrate, S^2, ihrer Cuben S^3, u. s. f., die Summe aller Glieder ohne das letzte, $S^2 - \omega^2$, aller Cuben $S^3 - \omega^3$, u. s. w.

Schreibt man die gefundene Formel von r^2 algebraisch, so ist

$$r^2 = \omega^2 = a^2 + 2S - 2\omega + \omega - a.$$

$$r^3 = \omega^3 = a^3 - a + 3S^2 - 3\omega^2 + 3S - 2\omega$$

$$r^4 = \omega^4 = a^4 - a + 4S^3 - 4\omega^3 + 3S^2 - 6\omega^2 + 4S - 3\omega.$$

Suchet man aus der ersten dieser Gleichungen S, so ist $S = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$. Das heißt, die Summe aller Glieder, derer Quadrate man suchen will, ist gleich dem halben Quadrate des letzten Gliedes, und diesem Gliede halb genommen, und dem halben ersten Gliede minder dem halben Quadrate desselben. In unserm Exempel sind die Glieder 2, 3, 4, 5, 6, 7. Also $S = \frac{49}{2} + \frac{7}{2} + \frac{2}{2} - \frac{4}{2} = 29 - 2 = 27$, wie es auch wirklich ist.

Setzt

Setzt man diesen Werth für S in der Formel $\omega^3 = r^3 = a^3 - a + 3S^2 - 3\omega^2 + 3S - 2\omega$, so erhält man $\omega^3 = a^3 - a + 3S^2 - 3\omega^2 + \frac{3}{2}\omega^2 + \frac{3}{2}\omega - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a - 2\omega = a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 3S^2 - \frac{3\omega^2}{2} - \frac{1}{2}a$, und

$$S = \tfrac{1}{3}\omega^3 + \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{6}\omega - \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}a.$$

Auf die nemliche Art ergiebt sich

$$S^3 = \tfrac{1}{4}\omega^4 + \tfrac{1}{2}\omega^3 + \tfrac{1}{4} + \omega^2 - \tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}a^3 - \tfrac{1}{4}a^2,$$

u. s. w.

a) Durch diese Formeln kann man die Summe aller Quadrate, Cuben ꝛc. der in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen finden, wenn nur ihre Anzahl noch endlich ist. Z. B. Man möchte die Summe der Quadrate von 2, 3, 4, 5, 6, 7 wissen. $\omega = 7$, $a = 2$.

$S^2 = \frac{1}{3} \times 343 + \frac{49}{2} + \frac{7}{6} - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} - \frac{2}{6} = 139$. Und dieß ist auch die Summe von 4, 9, 16, 25, 36, 49. Wollte man die Summe aller Quadratzahlen von 1 bis 100 wissen, so fände man 338350.

259. Wäre die Zahl der zu summirenden Potenzen unendlich, so würde auch das letzte Glied, $\omega = \infty$, und $\omega^2 = \infty^2$, $\omega^3 = \infty^3$, und aus den Formeln für S, S^2, S^3 des vorhergehenden §. würde durch Substitution

$$S = \tfrac{1}{2}\infty^2 + \tfrac{1}{2}\infty - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a$$

$$S^2 = \tfrac{1}{3}\infty^3 + \tfrac{1}{2}\infty^2 + \tfrac{1}{6}\infty - \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}a$$

$$S^3 = \tfrac{1}{4}\infty^4 + \tfrac{1}{2}\infty^3 + \tfrac{1}{4}\infty^2 - \tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}a^3 - \tfrac{1}{4}a^2$$

Weil man das letzte Glied unendlich groß annimmt, so kann es eben darum durch Hinzusetzung ei-

ner endlichen Größe nicht vermehrt, und durch Hinwegnehmung einer endlichen Größe nicht vermindert werden; sonst wäre sie nicht unendlich. Und darum darf man alle endliche Größen, die mit einer unendlichen durch die Zeichen + oder — verbunden sind, weglassen, ohne einen Fehler zu begehen. Eben so verhält es sich, wenn mit einer unendlichen Größe vom höhern Grade eine andere von einem niedrigern durch die Zeichen +, oder — verbunden ist; denn eine unendliche Größe vom niedrigern Grade verhält sich zu seiner unendlichen vom höhern Grade eben so, wie eine endliche Größe zur unendlichen, oder $a : \infty :: \infty : \frac{\infty^2}{a}$.

Nun darf ich a weglassen, wenn es mit ∞ durch + oder — verbunden ist, wie eben erwiesen worden. Also auch ∞, wenn es mit ∞^2, oder gar ∞^3, oder ∞^2, wenn es mit ∞^3 durch + oder — verbunden ist. Es werden darum die Formeln von S, S^2, S^3, in folgende verwandelt, wenn man alle endliche, oder unendliche Größen vom niedrigern Grade wegläßt:

$$S = \tfrac{1}{2}\infty^2 = \tfrac{1}{2}\infty \times \infty$$

$$S^2 = \tfrac{1}{3}\infty^3 = \tfrac{1}{3}\infty^2 \times \infty$$

$$S^3 = \tfrac{1}{4}\infty^4 = \tfrac{1}{4}\infty^3 \times \infty$$

Ist aber der Exponent von S, m

$$S^m = \frac{1}{m+1}\infty^{m+1} = \frac{1}{m+1}\infty^m \times \infty$$

Drückt man diese Formeln mit Worten aus, so geben sie folgende Lehrsätze:

I. Die

I. Die Summe unendlich vieler in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen ist gleich dem Product aus der halben Anzahl der Glieder und dem letzten Gliede.

II. Die Summe ihrer Quadrate ist gleich dem Producte aus dem Quadrat des letzten Gliedes, und dem dritten Theile der Anzahl der Glieder.

III. Die Summe ihrer Cuben ist gleich dem Producte aus dem Cubus des letzten Gliedes, und dem vierten Theile der Anzahl der Glieder. Nach diesem Gesetze lassen sich auch die Lehrsätze für höhere Potenzen finden.

260. Setzt man für den letzten Exponenten von S einen Bruch, so erhält man für die Quadrat, Cubik, und andere Wurzeln eben so viele Lehrsätze.

Die allgemeine Formel (§.261.) ist $S^m = \frac{1}{m+1} \infty^m \times \infty$. Es sey $m = \frac{1}{2}$, hernach $= \frac{1}{3}$, und $= \frac{1}{4}$, so entstehen die Lehrsätze für die Quadrat — Cubik — und vierten Wurzeln

$$S^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \infty^{\frac{1}{2}} \times \infty = \frac{2}{3} \infty^{\frac{1}{2}} \times \infty$$

$$S^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} \infty^{\frac{1}{3}} \times \infty = \frac{3}{4} \infty^{\frac{1}{3}} \times \infty$$

$$S^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}+1} \infty^{\frac{1}{4}} \times \infty = \frac{4}{5} \infty^{\frac{1}{4}} \times \infty$$

$$S^{\frac{1}{m}} \text{ oder } \sqrt[n]{S} = \frac{1}{m+1} \infty^{\frac{1}{m}} \times \infty.$$

Man muß sodann diese Formeln nur mit Worten ausdrücken, wie im vorhergehenden §. geschehen ist.

Achtes Hauptstück.
Von den Logarithmen.
Erster Abschnitt.
Einleitung.

261. Ein Logarithmus ist der Exponent der Potenz einer Zahl, zu welcher sie erhoben werden muß, damit jede andere Zahl daraus werde.

Z. B. Aus der Zahl 4 soll 16 werden. Man schreibt dieß so: 4^2. Hier ist 2 der Logarithmus von 4, und zeigt an, ich soll 4 zur zweyten Potenz erheben, damit 16 daraus werde.

Man nehme eine beliebige Zahl, z. B. 3. (Es kann übrigens jede andere ganze, oder gebrochene Zahl genommen werden, nur die Einheit nicht.) Aus dieser Zahl kann jede andere ganze, oder gebrochene Zahl werden, nachdem ich sie nemlich zu dieser, oder jener Potenz erhebe. Z. B.

$3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$. $3^{8,38} = 4$. $3^{10,47} = 5$, $3^{12,57} = 6$, $3^{14,67} = 7$, oder $3^{1,397} = \frac{2}{3}$.
Wenn ich nun der Zahl 3 alle mögliche ganze und gebrochene Exponenten gäbe, oder zu den durch die Exponenten angezeigten Potenzen sie erhübe, würden aus 3 auch alle mögliche ganze, und gebrochene Zahlen werden. So könnte ich auch aus 2, 4, 56 rc. oder aus

aus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ oder jedem andern Bruche alle andere ganze, oder gebrochene Zahlen machen, nachdem ich ihnen diesen, oder jenen Exponenten gäbe

a) Jede Zahl kann also unendlich viele Logarithmen haben, denn z. B. 2 kann in jede andere Zahl, also in unendlich viele Zahlen verwandelt werden. Zu jeder Verwandlung gehört ein anderer Exponent. Also hätte z. B. 3 einen besondern Exponenten, oder Logarithmus. 4 kann wieder in jede Zahl, uud also auch in 3 verwandelt werden. Also hätte 3 hier wieder einen andern Exponenten, oder Logarithmus. Ja aus jeder andern Zahl kann wieder 3 werden. Aber dazu gehört allzeit ein anderer Exponent. Da nun die Anzahl der Zahlen unendlich ist, aus welchen 3 werden kann, muß auch die Anzahl der Logarithmen für 3 unendlich seyn.

b) Die Zahl, die zu verschiedenen Potenzen nach und nach erhoben wird, um jede andere daraus zu machen, heißt die **Basis**, oder **Grundzahl**.

c) Von dieser Grundzahl hängt es ab, zu was für einer Potenz sie erhoben werden muß, um sie in jede andere zu verwandeln. Soll 2 die Grundzahl seyn, so muß ich es zu einer andern Potenz erheben um 3 daraus zu machen, als wenn die Grundzahl 4 wäre. Eben so muß, wenn die Grundzahl 4 ist, dieses wieder zu einer andern Potenz erhoben werden, um 3 daraus zu machen, als wenn die Grundzahl 5 wäre, u. s. w. Also die Grundzahl bestimmt für jede andere Zahl, in die sie verwandelt werden soll, den gehörigen Logarithmus.

262. Eine Reihe solcher in natürlicher Ordnung fortwachsenden Potenzen einer Zahl heißt ein logarithmisches System.

a) So viele verschiedne Grundzahlen ich annehmen kann, so viele verschiedne logarithmische Systeme sind möglich. Z. B. Es sey die Grundzahl 2, so ist das logarithmische System

	2^1.	2^2.	2^3.	2^4	2^5.	2^6 rc.
Der Werth.	2.	4.	8.	16.	32.	64.

Ist die Grundzahl 3,

System.	3^1.	3^2.	3^3.	3^4.	3^5.	3^6.
Werth.	3.	9.	27.	81.	243.	529.

Ist die Grundzahl 4,

System.	4^1.	4^2.	4^3.	4^4.	4^5.	4^6.
Werth.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

Man heiße überhaupt die Basis eines Systemes a, und lasse die Exponenten von a^0 angefangen um 1 wachsen

System. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. - - - - - -

Nun ist $a^0 = 1$. (§. 86. III. Reg. a). Foglich ist der Logarithmus von $1 = 0$, es mag die Basis seyn, welche man immer will.

b) Man sieht daraus, daß die Exponenten, oder Logarithmen in arithmetischer Progression fortlaufen, nemlich 0, 1, 2, 3, 4, rc.

c) Die Größen, zu denen diese Exponenten gehören, wachsen in geometrischer Progression, wie hier 1. a. a^2, a^3, a^4.

263. Nach §. 236. lassen sich zwischen jeden zwoen Größen so viele geometrisch proportionale Größen finden, als man nur verlangt, und nach §. 211. zwischen jeden zwoen Größen so viele arithmetisch proportionale Größen, als man nur verlanget. Es seyn zwo Größen A, B. Zwischen diesen lassen sich z. B. 4 geometrisch proportionale Größen finden, die wir v, x, y, z nennen wollen. Die geometrische Reihe wäre also

$$A : v : x : y : z : B$$

Weil

Weil die Exponenten oder Logarithmen dieser Größen in arithmethischer Progression seyn müssen (§. 262. a), wenn der Exponent von A, a heißt, wird die ganze Reihe so aussehen:

$$A^{a} : v^{a+d} : x^{a+2d} : y^{a+3d} : z^{a+4d} : B^{a+5d}.$$

Wenn man also zwischen zwoen Größen so viele mittere geometrisch proportionale Größen suchet, werden die ihnen correspondirenden Exponenten, oder ihre Logarithmen arithmetisch proportional seyn. Von diesem Satze werden wir gleich Gebrauch machen.

264. Bequemlichkeit halber hat man bey Berechnung der Logarithmen für die gewöhnlichen Zahlen die Basis 10 angenommen, nemlich

Syst. 10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6
Werth. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 ꝛc.

a) Es ist also Log. 1 = 0. Log. 10 = 1. Log. 100 = 2. Log. 1000 = 3. Log. 10000 = 4, und überhaupt hat der Log. immer um eine Zahl weniger als die Zahl Ziffern hat, zu der er gehört. Ist die Zahl der Ziffern, aus denen eine Zahl besteht, n, so ist die Zahl der Einheiten des Log. n — 1.

265. Auf diese Weise hat man aber nur die Logarithmen von 1, 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. Es fehlen aber noch die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000, u. s. f. Um auch diese Logarithmen zu finden, verfährt man so. Man giebt so wohl den Gliedern der geometrischen

trischen Reihe, als ihren Exponenten, oder Logarithmen einige Nullen zu, woraus folgende Reihen entstehen:

0,0000000 1,0000000
1,0000000 : 10,0000000 :
2,0000000 3,0000000
100,0000000 : 1000,0000000

Dieses geschieht darum, weil die geometrisch- und arithmetischen Proportionalzahlen, die man, wie wir gleich hören werden, zwischen 1 und 10, zwischen 0, 1 ꝛc. suchen muß, nicht genau ganze Zahlen, sondern bloße Brüche, und Ganze, und Brüche zusammen sind. Je mehr man Decimalstellen nimmt, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe dieser Ganzen, und Brüche.

Suche ich nun zwischen 1 und 10 eine geometrisch proportionirte, und zwischen den Logarithmen derselben 0, und 1, eine arithmetisch proportionirte Zahl, (das ist, zwischen 1,0000000, und 10,0000000, und zwischen 0,0000000, und 1,0000000) so ist jene 3,1622777, und diese 0,50000000. Darauf suche ich wieder zwischen 10,0000000 und 3,1622777, die mittere geometrische, und zwischen ihren Exponenten 1,0000000, und 0,5000000 die mittere arithmetische Proportionalzahl. Und so fahre ich fort immer zwischen 10,0000000 und der eben gefundenen geometrischen Proportionalzahl eine mittere geometrische, und zwischen 10,0000000 und der eben gefundenen arithmetischen Proportionalzahl eine mittere arithmetische zu suchen. Bis endlich die erstere gleich 9,0000000 wird; dann ist ihr Exponent,

nent, oder die dazu gehörige arithmetische Proportionalzahl der Log. von 9. Es wird dieser Exponent, oder der Log. von 9 seyn 0,9542425. Beyde mittere Zahlen wird man erst finden, nachdem man die Arbeit sechs und zwainzigmal wiederholt hat.

Der Grund dieses Verfahrens ist: Es muß eine Zahl geben, die sich so zu 9 verhält, wie 9 : 10, und diese Zahl zu finden suche ich zuerst zwischen 1 und 10 die mittere geometrische Zahl, dann zwischen der gefundenen, die wir a heißen, und 10, d. i. zwischen a und 10 wieder die mittere b, zwischen b und 10 wieder u. s. f. bis endlich die mittere 9 wird. Weil aber die Logarithmen aller dieser mittern geometrisch proportionalen die mittern arithmetisch Proportionalzahlen ihrer Logarithmen sind, muß der Exponent von 9 auch der Logarithmus 9 seyn (§. 263.).

Durch diese Verfahrungsart ließen sich auch die Logarithmen der übrigen Zahlen zwischen 1 und 13, zwischen 10 und 100 rc. finden. Man darf aber nicht glauben, daß man sie auf diese Art für alle Zahlen habe suchen müssen. Nur für Primzahlen, das ist, für solche, die sich durch keine andere, als durch sich selbst oder durch die Einheit ohne Rest theilen lassen, war ehemals so eine Arbeit nöthig. Jetzt sind andere Methoden erfunden, die Logarithmen auf einen viel kürzern Weg zu finden, von denen ich hier nichts sagen will. Uebrigens, wenn man nur einmal den Log. von einer Zahl hat, so kann man daraus auch die Logarithmen

für

für gar viele andere Zahlen finden. Z. B. Aus dem Log. von 9. den Log. für 3, und alle Potenzen von 3, den Log. von 30, 300, von 90 ꝛc.

Suchet man auf die nemliche Art, wie man den Log. von 9 gesucht hat, auch den Log. von 2, so bekömmt man daraus schon eine erstaunliche Menge von Logarithmen, nemlich den Log. aller vielfachen von 2, den Log. von 5 und allen vielfachen von 5, den Log. von 6, und allen vielfachen. Auf diese Art kann man mit Beyhülfe der Log. von 9 und 2 die Log. aller Zahlen von 1 bis auf 100 finden, nur sind 23 Primzahlen, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ꝛc. ausgenommen. Hätte man keine bequemere Art, auch für diese Zahlen die Log. zu suchen, so müßte man die Methode befolgen, nach welcher man den Log. von 9 gefunden hat.

Aber zum Glücke hat man schon fertige logarithmische Tafeln, in welchen die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1000, oder 100000, oder noch weiter berechnet sind. Und aus diesen kann man die Log. für noch größere Zahlen leicht selbst finden. Wer schon solche Tafeln hat, bediene sich derselben. Wer sich erst eine logarithmische Tafel anschaffen will, dem empfehle Georg Vega logarithmische, trigonometrische &c. Tafeln, Wienn bey Trattnern 1783, theils wegen ihrer Korrektheit, theils wegen ihrem wohlfeilen Preise, und ihrer Bequemlichkeit.

266. Die Logarithmen sind theils durch ganze Zahlen, und angehängte Decimalbrüche, theils durch diese

diese allein ausgedrückt (§. vorherg.). Der Log. von 1 ist, 0, von 10, 1. Also ist die erste Ziffer eines Log. von einer Zahl zwischen 1 und 10, eine Nulle. Der Log. von 10 ist 1, von 100, 2. Also ist die erste Ziffer des Log. einer Zahl zwischen 10 und 100, 1, und wie (§. 264. a) gesagt worden, wenn die Anzahl der Ziffern, aus welcher eine Zahl besteht, n heißt, so enthält die erste Zahl des Log. Einheiten n — 1. Darum nennet man diese erste Ziffer, oder Ziffern die **Kennziffern**, oder **Charakteristik**, weil man daran erkennet, wie viele Ziffern die Zahl haben müsse, für welche der Logarithmus gehört, nemlich immer eine mehr, als die Charakteristik Einheiten hat. Oder umgekehrt, wenn eine Zahl gegeben ist, so muß der dazu gehörige Log. in seiner Charakteristik eine Einheit weniger haben, als die Zahl Ziffern hat. Z. B. 5,3702688 ist der Logarithmus einer Zahl von 6 Ziffern, und für 4536 gehört ein Log. dessen Kennziffer 3 ist.

Darum ist auch in einigen Log. Tafeln die Kennziffer weggelassen, damit man Raum erspart, und sie nicht so oft abdrucken darf; denn jeder kann sie leicht selbst hinzusetzen.

Wird die Charakteristik eines Log. um 1 vermehrt, oder vermindert, so ist es eben so viel, als wenn ich die Zahl, zu der er gehört, mit 10 multiplicirt, oder dividirt, d. ist. um 10mal größer, oder kleiner gemacht hätte. Z. B. 1,4623980 ist der Log. von 29. Mache ich aber daraus 2,4623980, so ist er der Log. von 290.

Mache

Mache ich daraus 0,4623980, so ist das der Logar. von $\frac{29}{10}$, oder $2\frac{9}{10}$.

Denn weil Log. 1 = 0, Log. 10 = 1. Log. 100 = 2 und so fort, so wachst die Charakterist so oft um 1, so oft die Zahl zehnfach wächst, oder mit 10 multiplicirt wird. Und folglich auch umgekehrt, so oft die Charakteristik um 1 vermindert wird, gehört der Log. zu einer 10mal kleinern Zahl, oder es ist so viel, als wenn die dem unveränderten Log. entsprechende Zahl wäre mit 10 dividirt worden.

a) Wenn man also einen Log. **unter seiner Charakteristik** in den Tafeln nicht findt, so suche man ihn unter einer um 1, 2, oder 3 größern. Findt man ihn da, so schneide man von der diesem Log. zukommenden Zahl so viele Ziffern als einen Decimalbruch ab von hinten herein, um so viele Einheiten die höhere Charakteristik mehr hat, als die gegebene; denn die unter einer höhern Charakteristik gefundene Zahl ist zehn- hundert- tausendmal ꝛc. größer als die, welche zum gegebenen Log. gehört. Man mache sie also, zehn- hundert- tausendmal ꝛc. kleiner, d. i. man schneide von hinten herein eine, zwo, drey ꝛc. als einen Decimalbruch ab; denn das ist so viel, als wenn ich sie zehn- hundert- tausendmal ꝛc. kleiner machte, oder mit 10, 100, 1000 ꝛc. dividirte. Und man hat die ganze Zahl sammt dem Decimalbruche, zu der der gegebene Log. gehört. Z. B. Der Log. 0,2013971 steht nicht in den Tabellen. Ich finde ihn aber unter der Charakteristik 2. Weil also diese Charakteristik um 2 größer ist, als die vorige, und die dazu gehörige Zahl 159 ist, so ist der gegebene Log. der Log. der Zahl 1,59, oder $1\frac{59}{100}$.

Eben

Eben so, weil der Logar. von 4572 ist 3,6601062, wird seyn

von 457200	der Log.	5,6601062
45720	- - -	4,6601062
4572	- - -	3,6601062
457,2	- - -	2,6601062
45,72	- - -	1,6601062
4,572	- - -	0,6601062

Zweyter Abschnitt.

Vom Nutzen und Gebrauch der Logarithmen.

268. Anfänger, die den Nutzen der Logarithmen noch nicht einsehen, müssen nothwendig über die langwierige Arbeit und Geduld derjenigen erstaunen, die sie berechnet haben, und dann fragen: Lohnet es sich auch der Mühe? Darum will ich ihnen jetzt auch den Nutzen der Logarithmen zeigen, und sie werden sodann gerne selbst sich derselben bedienen, und sich ihre Behandlung durch öftere Uebung geläufig machen.

Logarithmen sind Exponenten der Würden einer Zahl (§. 261.). Man rechnet also mit Logarithmen, wie mit den Exponenten. Soll ich a^3 mit a^2 multipliciren, so werden die Exponenten nur addirt, und $a^3 \times a^2$ ist $= a^5$. Nun sind alle in natürlicher Ordnung aufeinander folgende Zahlen gleichartige Größen, die man so ansehen kann, als wären sie durch die Erhebung der Grundzahl, oder Basis 10 zu einer gewissen Potenz, welche der Logarithmus ausdrückt, entstanden (§. 261. 265.). Folglich heißt die Logarith-

men zwoer Zahlen zusammen addiren so viel, als diese Zahlen selbst miteinander multipliciren, und die Summe ihrer Logarithmen ist der Log. des Products dieser Zahlen. Man darf also nur diesen Log. in den Tafeln suchen, so steht das Product schon dabey.

a) Der erste Nutzen der Logarithmen ist folglich: **Die Multiplication wird in eine Addition verwandelt.** Es ist aber ungleich bequemer, zwo Zahlen zusammen addiren, als sie miteinander multipliciren.

Z. B. Man soll 324 multipliciren mit 789.

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 324 = & +2{,}5105450 \\ \text{Log. } 789 = & +\underline{2{,}8970770} \\ & 5{,}4076220 \end{array}$$

Schlage ich diesen Log. auf, so steht dabey die Zahl 255636, welche das Product aus 324×789. ist.

Freylich wäre es auch oft beschwerlicher, erst die Logarithmen der Factoren nachzuschlagen, auszuschreiben, zu addiren, und den Log. ihrer Summe wieder zu suchen, absonderlich wenn er nicht ganz in den Tafeln steht, als wenn man die Zahlen selbst gleich miteinander multiplicirte. Man käme auf diese Weise geschwinder zu Ende. Allein bey so kleinen Factoren bedient man sich auch der Logarithmen nicht. Aber bey trigonometrischen Rechnungen äußert sich erst ihr rechter Nutzen. Da soll man eine Zahl von 8 Ziffern mit einer andern von eben so vielen multipliciren, und das Product wieder mit einer solchen Zahl dividiren, das wäre gewiß eine langweilige Arbeit. Aber hier nimmt man nur die Logarithmen dieser Zahlen, und man vollendet die Rechnung in einer Minute, zu der man sonst vieleicht eine halbe Stunde brauchen würde.

269. Bey der Division gleichartiger Potenzen wird der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividends subtrahirt ($\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$). Also nach dem, was im vorherg. §. gesagt worden, wenn eine Zahl durch die andere dividirt werden soll, zieht man nur den Log. des Divisors von dem des Dividends ab, und der Rest ist der Log. des Quotienten.

Der zweyte Vortheil der Log. ist also: **Durch sie wird die Division in eine Subtraction verwandelt.** Und diese ist freylich bequemer, als jene.

Divid.	21024.	Log.	4,3227153
Divid.	584.	Log. —	2,7664128
			1,5563025

Bey diesem Log. steht in den Tabellen die Zahl 36. Sie ist also der Quotient, wenn 21024 dividirt wird mit 584.

270. Soll man eine Potenz zu einer andern erheben, so wird ihr Exponent mit dem Exponenten der verlangten Potenz multiplicirt ($(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$). Multiplicirt man also den Log. einer Zahl mit dem Exponenten der verlangten Potenz, so bekömmt man den Log. der verlangten Potenz dieser Zahl, und bey ihm steht in den Tafeln die Potenz selbst.

Der dritte Vortheil von den Log. ist also: **Durch sie kann man jede Größe geschwind zur verlangten Potenz erheben**, welches viel bequemer ist, als

wenn man die Größe etlichemal mit sich selbst, oder mit einer andern Größe multipliciren müßte.

Hier äußert sich der Nutzen der Logarithmen augenscheinlich. Wenn ich z. B. 5723 zur fünfzehnten Potenz erheben müßte, wie solches bey Interusurien, und Rabatrechnungen und sonst öfters nothwendig ist (§. 243 — 249.): würde ich zuerst 5723 mi tsich selbst, das Product mit der nemlichen Zahl, und so vierzehnmal nacheinander multipliciren müssen, welches eine ungeheure Rechnung gäbe. Aber jetzt nehme ich nur den Log. von 5723, nemlich 3,5776237, und multiplicire ihn mit 15, und erhalte 56,3643555. Die dazu gehörige Zahl bestünde aus sieben, und fünfzig Ziffern. Da man diese gar oft nicht zu suchen braucht, sondern durch die Subtraction die Charakteristik bis auf eine solche herabgesetzt wird, die in den logarithmischen Tafeln vorkömmt, erspart man sich auf diese Art eine äußerst weitläuftige, und noch dazu unnützliche Rechnung.

271. Man zieht aus einer Potenz die verlangte Wurzel, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt ($\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$). Man darf also nur, um aus einer Zahl die verlangte Wurzel zu ziehen, ihren Log. durch den Wurzelexponenten dividiren.

Der vierte Vortheil von den Log. ist also: **Durch sie kann man aus jeder Größe durch eine bloße**

bloße Division sehr geschwind jede Wurzel ausziehen.

Anfänger werden sich erinnern, wie mühsam es sey, auch nur die Cubikwurzel aus einer großen Zahl auszuziehen. Hier darf man nur ihren Log. durch 3 dividiren. Der Quotient ist der Log. der Cubikwurzel. Z. B. Man soll die Cubikwurzel aus 39304 ausziehen.

$$\text{Log. } 39304 = \frac{4{,}5944368}{3} = 1{,}5314789 = \text{Log. } 34.$$

Dieß ist also die Cubikwurzel.

Dritter Abschnitt.

Vom Gebrauche der logarithmischen Tafeln.

272. Aus dem, was §. 265 von Verfertigung der logar. Tafeln gesagt worden, erhellet, daß sie nur für ganze Zahlen verfertiget sind; und man sollte doch oft die Logarithmen für Ganze und Brüche zusammen, oder für Brüche allein haben. Ferner reichen die gemeinen Tafeln nur bis auf 100000; aber für größere Zahlen hat man keine Logarithmen, ob man sie gleich auch recht oft nöthig hätte. Nur für den Fall allein ist gesorgt, wenn die Zahlen gerade zehn= hundert= tausendmal ꝛc. größer sind, als die, welche in den Tafeln stehen, wo man nur die Charakteristik der Logarithmen um 1, 2, 3 ꝛc. vergrößern darf um die Logarithmen der zehn= hundert= tausendfachen ꝛc. Zahl zu haben (§. 267.). Oft verfällt man durch die Rechnung auf einen Log. der größer ist, als alle in den Tafeln enthaltenen, oder

der nicht genau in den Tafeln vorkömmt, und weis dann nicht, von welcher Zahl er der Log. ist. Es ist also noch Anweisung nöthig, wie man erstens für jede Zahl ihren Log. finden kann, die grösser ist, als jede in den Tafeln vorkommende. Zweytens, wie man ihn für eine Zahl finden kann, der ein Bruch angehängt ist. Drittens, umgekehrt, wie man für jeden Logarithmus die Zahl finden kann, deren Log. er ist, er mag nun grösser, als alle in den Tabellen enthaltene Logarithmen, oder doch wenigstens nicht genau in den Tabellen enthalten seyn. Viertens, wie man die Logarithmen für Brüche finde, auch jene Brüche, die miteinander multiplicirt, oder durcheinander dividirt werden, oder die Logarithmen der Potenzen, oder Wurzeln von Brüchen.

Meistentheils ist den logarithmischen Tafeln auch eine Anweisung zu ihrem Gebrauche beygefügt, die sich auf die besondere, mehr, oder minder bequeme Einrichtung derselben bezieht. Man muß sie also vorher lesen, ehe man sich dieser Tafeln bedient. Ich kann nur allgemeine Regeln angeben.

273. Den Log. einer ganzen Zahl zu finden, die grösser ist, als alle in den Tafeln enthaltene.

Erstens, schneid von hinten von dieser Zahl so viele Ziffern ab, bis die noch übrigen in den Tafeln enthalten sind.

Z. B. Man verlangte den Log. von 4298567. Nachdem deine Tafeln weit reichen, schneid von hinten

hereiu

herein eine, zwey, oder drey Ziffern ab, und schreib entweder 4298,567, oder 42985,67. Wir wollen das letzte wählen.

Zweytens, suche jezt den Log. für die unabgeschnittene Zahl, nemlich für 42985, und den für die nächst grössere Zahl 42986.

Drittens, zieh den kleinern Log. vom grössern ab. In einigen Tafeln steht die Differenz schon, und man kann das Abziehen ersparen.

Viertens, mache folgende Analogie: Wie sich 1, die Differenz der Zahlen, zur Differenz ihrer Logarithmen verhält, so verhalten sich die abgeschnittenen Zahlen, zu einer vierten.

Fünftens, diese vierte gefundene Zahl addire zum kleinern Log. und es wird der Log. der gegebenen Zahl seyn, wenn man nur die Charakteristik um so viele Einheiten vermehrt, als hinten Ziffer sind abgeschnitten worden. In unserm Exempel

Log. 42985 = 4,6333169
Log. 42986 = 4,6333270
Differenz 101

1 : 101 : : 67 : 6767.

Man kann hier ohne Bedenken die letzten zwo Ziffern weglassen, aber man schreibt statt 67, 68. (§. 70. e). Dieses wird zum kleinern Log. addirt, und dessen Charakteristik um 2 vermehrt, weil zwo Ziffern abgeschnitten worden (§. 267.).

 4,6333169

$$\begin{array}{r} 4{,}6333169 \\ +2 \quad +68 \\ \hline 6{,}6333237 \end{array}$$ Log. von 4298567

Man wird die Ursache von dieser ganzen Verfahrungsart einsehen. Nur wird man vieleicht anstehen, warum man die gesagte Proportion anstellen muß. Man betrachtet nemlich die abgeschnittenen Ziffern, 67, als einen Decimalbruch, der der ganzen Zahl 42985 angehängt ist, und fragt dann so: Wenn die gegebene Zahl von der nächst größern um 1 unterschieden ist, beträgt die Differenz ihrer Logarithmen 101. Wie viel wird sie betragen, wenn sie nicht um 1, sondern nur $\frac{67}{100}$ verschieden ist. Diese Differenz zum kleinern Log. addirt giebt den Log. von 42985,67, oder wenn ich die Charakteristik um 2 vermehre, von 4298567.

Wären aber mehr, als zwo Ziffern abgeschnitten worden, so fände man den Logarithmus nicht genau. Alsdann muß man sich an die den Tafeln beygefügte Anweisung halten, nach welcher man auch Logarithmen für Zahlen von zehn, und mehrern Ziffern finden kann. Nur vergesse man niemal die Charakteristik zu vermehren, daß sie um eine Einheit weniger bekomme, als die Anzahl der Ziffern der gegebenen Zahl Einheiten hat.

274. Den Logarithmus einer Zahl zu finden, die einen Decimalbruch bey sich hat. NB. Gemeine Brüche verwandelt man zuvor in Decimalbrüche.

Entwe-

Entweder machen die Decimalstellen mit der ganzen Zahl noch keine Zahl aus, die größer ist, als die größte in den Tafeln. In diesem Falle betrachte man die ganze Zahl mit dem Decimalbruche als eine ganze Zahl, suche ihren Log. Oder sie machen zusammen eine Zahl aus, die größer ist, als die größte in den Tabellen. Dann suche man ihren Log. wie im vorhergehenden §. gesagt worden. Nur muß in jedem Falle die Charakteristik so viele Einheiten, weniger eine haben, als die ganze Zahl Ziffern. Z. B. Es werden gesucht die Logarithmen von

274,38 = 4,4383524
— 2
2,4383524

4978,253, oder
49782 = 4,6970723 in den Tabellen.
Die Differenz vom nächst größern 88.
1 : 88 : 53 : 4664, oder 47
4,6970723
— 1 + 47
3,6970770. Log. von 4978,253.

275. Den Log. für eine ganze Zahl und einen angehängten gemeinen Bruch zu finden.

Entweder verwandle man den gemeinen in einen Decimalbruch, und verfahre wie im vorherg. §. gesagt worden. Oder weil bey den Logarithmen die Division in eine Subtraction verwandelt wird, so addire man den Bruch zum Ganzen nach den gewöhnlichen Regeln,

und subtrahire dann vom Log. des zusammengesetzten Zählers den Log. des Nenners.

I. Art.

$234\frac{3}{4}$, oder 234,75. Log. 2,3706046.

II. Art.

$$234 = \frac{939}{4} = \begin{array}{r} 2,9726656 \\ -\,0,6020600 \\ \hline 2,3706056. \end{array}$$

276. Die für einen Log. gehörige Zahl zu finden, wenn dieser nicht in den Tafeln steht.

Ohne Rücksicht auf die Charakteristick zu nehmen, suche man den Log. erstens unter der höchsten Charakteristik in den Tafeln. Steht er darinn, so schreibe man ihn aus, und schneide von vornen so viele Zahlen ab, als für die gegebene Charakteristik gehören, und man hat die begehrte Zahl. Steht er aber nicht darinn, so suche man

Zweytens, unter der größten Charakteristik jenen Log. der der nächst kleinere vom gegebenen ist.

Drittens, zieh man diesen nächst kleinern von dem darunter stehenden nächst größern ab, wenn die Differenz nicht schon in den Tafeln angemerkt ist.

Viertens, zieh man auch den nächst kleinern Log. vom gegebenen ab. Der Rest heiße die zweyte Differenz.

Fünf=

Fünftens, mache man folgende Proportion: Wie sich die erste Differenz zur zweyten verhält, so verhält sich 1 zum vierten Glied. Was heraus kömmt, hänge man der bey dem nächst kleinern Log. stehenden Tabellarzahl an. Die Charakteristik des gegebenen Log. zeigt an, aus wie vielen Ziffern die ganze Zahl bestehen müsse, und wie viele Decimalstellen abgeschnitten werden. Jene muß um eine Ziffer mehr haben, als die Charakteristik Einheiten. Die Ursache dieses Verfahrens läßt sich aus §. 263 begreifen.

I. Beyspiele. Es sey gegeben der Log. 2,6941229. Zu welcher Zahl gehört er? Unter der Charakteristik 2 steht er nicht in den Tafeln, wohl aber unter der Charakteristik 4, und zwar bey der Zahl 49445. Weil die gegebene Charakteristik 2 ist, müssen drey Ziffern für die ganze Zahl abgeschnitten werden. Also gehört der Log. für die Zahl 494,45, oder $494\frac{9}{20}$.

II. Beyspiel. Zu welcher Zahl gehört der Log. 6,1548623. Der nächst kleinere in den Tabellen ist 4,1548496, und die dazu gehörige Zahl 14284. Die Differenz zwischen diesen, und nächst größern Log. 304, zwischen dem gegebenen, und nächst kleinern Log. ist sie 125. Also $304 : 125 : 1 : \frac{125}{304} = 0{,}411217$ rc. Hängt man diese Ziefern der obigen Zahl an, und schneidet wegen der gegebenen Charakteristik, 6, sieben Ziffern als Ganze weg, so gehört der gegebene Log. zur Zahl 1428441,1217 rc.

277. Den

277. Den Log. eines eigentlichen Bruches zu finden.

Der kürzeste Weg wäre freylich, nach (§. 269.) den Log. des Nenners vom Log. des Zählers abzuziehen. Der Rest wäre dann der Log. des Bruches. Allein dieser wäre allzeit negativ; weil bey einem eigentlichen Bruch der Nenner, als Subtrahendus, größer seyn muß, als der Zähler. Allein mit negativen Logarithmen wird die Rechnung unbequem. Ich will also eine andere Methode zeigen, für jeden Bruch einen positiven Log. und für jeden Log. eines Bruches den dazu gehörigen Bruch selbst zu finden. Damit man sie desto leichter verstehe, will ich folgendes voraus schicken.

Nach der angenommenen Basis unsers logarithmischen Systems (§. 264.) ist der

Log. von 1 , 0
von 10 , 1
von 100 , 2
von 1000, 3

und wie der Werth der Zahlen zehnfach wächst, wächst die Charakteristik allzeit um 1.

Wäre hingegen der

Log. von 1 — 10, so würde der
von 10 — 11
von 100 — 12
von 1000 — 13 und so weiter seyn.

Also die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10 würden zur Charakteristik 10 haben, alle der Zahlen

len zwischen 10 und 100, 11, alle der Zahlen zwischen 100 und 1000, 12. Hingegen die Logarithmen aller gebrochenen Zahlen, die nothwendig zwischen 0 und 1 hineinfallen, würden dann zur Charakteristik eine von den ersten neun Zahlen haben; denn die Charakteristik von der ersten ganzen Zahl, oder vielmehr von der Einheit, ist 10. Und wie der Werth der Brüche zehnfach abnimmt, müßten auch die Kennziffer ihrer Logarithmen immer um eine Einheit abnehmen.

Man würde also folgende immer zehnfach abnehmende Größen, und ihre dazu gehörigen Logarithmen, oder vielmehr ihre Kennziffer erhalten.

Größe.		Log.
1000	—	13.
100	—	12.
10	—	11.
1	—	10.
$\frac{1}{10}$	—	9.
$\frac{1}{100}$	—	8.
$\frac{1}{1000}$	—	7 u. s. f.

Es ist aber (§. 69. c.) $\frac{1}{10}$ als Decimalbruch ausgedrückt $= 0,1$, $\frac{1}{100} = 0,01$, $\frac{1}{1000} = 0,001$. u. s. f. Ein Log. also, dessen Charakteristik in unsrer Voraussetzung 9 wäre, bedeutete Zehntheile, oder 0,1. Eine mit der Charakteristik 8, bedeutete Hunderttheile, oder 0,01, ein Log. mit der Charakteristik 7, bedeutete Tausendtheile, oder 0,001.

Man

Man kann aber den Log. von 1 = 10 annehmen, wenn man hernach den Log. von 10, 11, von 100, 12, von 1000, 13 annimmt. Und auf diese Weise vermeidet man alle negative Logarithmen.

a) In unsrer Voraussetzung würde jede dem Log. zugehörige ganze Zahl so viele Ziffern haben, und noch um eine mehr, als die Charakteristik des Log. Einheiten über 10 hat. Denn für 10, als Charakteristik betrachtet, gehört die Zahl 1, für 11, das eine Einheit mehr, als 10, hat, gehört 10, für 12, 100. u. s. f.

b) Jeder dem Log. zugehörige Bruch würde vor seinen bedeutenden Ziffern so viele Nullen haben, um so viele Einheiten seine Charakteristik kleiner ist, als 9; denn $\frac{1}{10}$ oder 0,1 hat die Charakteristik 9, $\frac{1}{100}$, oder 0,01, hat 8, $\frac{1}{1000}$, oder 0,001 hat die Charakteristik 7. Es ist aber $9-8=1$, $9-7=2$. Es hat aber auch der Bruch mit der Charakteristik 8 eine, der mit der Charakteristik 7, zwo Nullen vor seiner bedeutenden Ziffer.

c) So ein aus der Voraussetzung, daß der Log. von 1,10 sey, hergeleiteter Log. heißt ein **hypothetischer**, und man kann daraus gleich den wahren negativen finden, der herausgekommen wäre, wenn man vom gemeinen Log. des Zählers den Log. des Nenners subtrahirt hätte; denn da der hypothetische Log. von 1 zehnmal so groß ist, als der gemeine, muß der hypothetische Log. des Bruches so viel über 1 machen, als der gemeine desselben unter 1 war. Ich darf also nur den hypothetischen von 10,0000000 abziehen, und dem Rest das Zeichen — vorsetzen, so habe ich den gemeinen Logarithmus des Bruches. Nach dieser Voraussetzung wollen wir die vorige Aufgabe wieder vornehmen.

278. Den

278. **Den Logarithmus eines eigentlichen Bruches zu finden.**

Entweder ist er als Decimal- oder als gemeiner Bruch ausgedrückt.

I. **Als Decimalbruch.** Man suche den Logarithmus der bedeutenden Ziffern, und statt der Charakteristik schreibe man entweder 9, oder eine, die um so viel Einheiten weniger, als 9 hat, so viele Nullen der Decimalbruch vor seinen bedeutenden Ziffern nach dem Decimalzeichen hat.

Es sey der Decimalbruch 0,4332. Der Logarithmus dieser Zahl in den Tabellen ist 3,6356848, und weil keine Nulle vor den bedeutenden Ziffern steht, so ist ihr Log. 9,6356848.

Es sey der Decimalbruch 0,003756. Der Logarithmus der bedeutenden Ziffern ist 3,5747256. Weil aber zwo Nullen voraus gehen, muß die Charakteristik 7 seyn, folglich ist der Logarithmus dieses Bruches 7,5747256.

Als gemeiner Bruch. Man vermehre die Charakteristik des Zählers um 10, das ist, man addire zu ihr 10, und ziehe aon diesem Logarithmus des Zählers den gemeinen Logarithmus des Nenners ab. Der Rest ist der hypothetische Log. des Bruches.

$\frac{3}{7}$ = 0,4771213. Schreib 10,4771213

— 0,8450980   0,8450980

9,6320233 hypothetischer Logarithmus von $\frac{3}{7}$.

Die

Die Ursache dieses Verfahrens ist klar. Im Bruche $\frac{3}{7}$ ist 7 der Divisor, 3 der Dividend. Nun ist (§. 35.) der Divisor im Dividend so oft enthalten, als 1 im Quotus. Also

7 : 3 :: 1 : $\frac{3}{7}$. Oder durch Logarithmen, wo Multiplication und Division in Addition und Subtraction verwandelt werden.

Log. 7 : Log. 3 :: Log. 1 : Log. $\frac{3}{7}$. Folglich Log. 3 + Log. 1 — Log. 7 = Log. $\frac{3}{7}$. Man hat aber hier den Log. 3 = 0,4771213, und den Log. 10 = 10,0000000 zusammen addirt, und den Logar. 7 = 0,8450980 davon subtrahirt. Also ist der Rest der Log. von $\frac{3}{7}$.

279. Aus einem gegebenen Logarithmus eines Bruches diesen selbst zu finden.

Es sey der Log. 5,2438661. Suche ihn unter der größten Characteristik deiner Tafeln. Der nächst kleinere gehört zur Zahl 17533. Weil die Charakteristik 5 von 9 um vier Einheiten unterschieden ist, ist der zum Logarithmus gehörige Bruch 0,000017533. (§. 277. b).

280. Den Logarithmus des Products zweener Brüche zu finden.

Man addire nur die Logarithmen beyder Brüche. Die Summe ist der Logarith. des Productes. (268. a) Nur muß man von der Charakteristik 10 wegwerfen.

Z. B. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } \frac{1}{2} = & 10,0000000 \\ & -0,3010300 \\ \hline & 9,6989700 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } \frac{2}{3} = & 10,3010300 \\ & -0,4771213 \\ \hline & 9,8239087 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Also Log. } \frac{1}{2} + \text{Log. } \frac{2}{3} = & 9,6989700 \\ & 9,8239087 \\ \hline & 19,5228789 \\ & -\ 10 \\ \hline & 9,5228787 \end{array}$$

= Logarith. von 0,33333 2c. = $\frac{1}{3}$.

Es ist in dieser Verfahrungsart alles klar bis auf das einzige, warum man von der Summe der Logarithmen 10 wegwerfen muß. Wir wissen aber aus der Multiplication (§. 27.) daß die Einheit im Multiplicator so oft enthalten, als der Multiplicandus im Product. Oder in Logarithmen (§. 268. 269.).

Log. Multiplicators + Log. Multiplicand — Log. Einheit (hier in der Voraussetzung 10) = Log. des Produkts. Also muß 10 von der Charakteristik weggeworfen werden.

281. Den Log. des Quotienten zu finden, der aus der Division eines Bruches durch einen andern entsteht.

Man subtrahirt den Log. des Divisors vom Log. des Dividends. Der Rest ist der Log. des Quotienten. Nur muß die Charakterisiik des Dividends um 10 vermehrt werden.

Z. B. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

$$\begin{array}{ll} \text{Log.}\ \frac{1}{2} = & 19{,}6989700 \\ \text{Log.}\ \frac{2}{3} = & -9{,}8239087 \\ \hline & 9{,}8750613 \end{array} = \text{Logar. von}\ \frac{0{,}5500}{10000} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

Hier braucht wieder nur gezeigt zu werden, warum die Charakteristik des Dividends um 10 vermehrt werden muß. Der Divisor ist zum Dividend, wie die Einheit zum Quotienten, oder mit Log.

Log. Dividends + Log. Einheit (hier 10) — Log. des Divisors.

282. Den Log. einer Potenz eines Bruches zu finden.

Man multiplicirt den Log. des Bruches mit dem Exponenten der verlangten Potenz, und subtrahirt von der Charakteristik des Products das Product aus 10 multiplicirt mit dem Exponenten der Potenz weniger 1.

Z. B. $\frac{1}{2}$ soll zur zweyten Potenz erhoben werden $= \frac{1}{4}$

$$\text{Log.}\ \frac{1}{2} = 9{,}6989700$$

$$\times 2 = 19{,}3979400 - 10 \times \overline{2-1} = -10$$

$$9{,}3979400. = \text{L.}\ \frac{2500}{10000} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Warum muß man von der Charakteristik des Productes das Product aus 10 multiplicirt mit dem Exponenten weniger 1 abziehen? Einen Bruch zur Potenz erheben, heißt ihn so oft nehmen, oder zu sich selbst addiren, als der Exponent der Potenz Einheiten enthält,

hält, weniger einmal (§. 80.), das heißt, man muß den Log. des Bruches so oft, weniger einmal zu sich selbst addiren. Für jede Addition muß man aber 10 von der Charakteristik abziehen (§. 281.).

283. Den Logarithmus für eine Wurzel eines Bruches zu finden.

Man vermehre den Logarithmus des gegebenen Bruches mit dem Producte aus 10 multiplicirt mit dem Exponenten weniger 1. und dividire die Summe durch den Wurzelexponenten. Der Quotient wird der Log. der Wurzel seyn.

Z. B. Man soll die Quadratwurzel von $\frac{1}{4}$ suchen. $\frac{1}{4} = 9,3979400$. Zur Charakteristik 9 dieses Log. wird gesetzt $10 \times \overline{2 - 1} = 10$.

19,3979400. Das wird dividirt mit 2, und giebt 9,6989700. Und dieß ist der Log. von $\frac{1}{2}$ der Wurzel, wie wir in der vorhergehenden Aufgabe gesehen haben.

Der Grund dieses Verfahrens erhellet aus §. 282, da diese Aufgabe nur die umgekehrte der vorhergehenden ist.

Eine andere Art die verschiedenen Rechnungsarten mit Brüchen durch Logarithmen anzustellen findt man in der Einleitung zum Gebrauche der logarithmischen Tafeln in Vega's öfters angeführtem Werke. Dieß mag für Anfänger erklecken.

Fehler,

welche zu verbessern sind.

Unerheblichere wird der geneigte Leser selbst verbessern.

Seite. Zeile.

8 — 23. minder, oder von lies minder

12 — 13. links oder rechts - - wird einmal ausgel.

24 — 8. wihst - - willst.

30 — 10. im vierten Fache der Tafel 46 - - 36.

32 — 11. aus mehrern Ziffern des Multiplicandus - - mit allen Ziffern den Multiplicandus.

34 — 10. genommen werden - - so oft genommen werd.

36 — 8. von unten. 364320 - - 544320.

45 — 5. nächst kleinere - - nächst größere.

55 — 14. Zur Linken - - von hinten.

67 — 16. $=\frac{3}{3}$ 1 - - $\frac{3}{3} = 1$.

76 — 7. Es sey - - Es seyn.

77 — 3. von unten $\frac{40, 45, 48}{6}$ — $\frac{44, 45, 48}{60}$

78 — 19. einer solchen - - einer

79 — 6. 36 - - 18.

83 — 11. 1, 2, 4 - - 2, 4.

84 — 3. $\frac{2}{8}$ - - $\frac{3}{8}$

89 — 14. Theiler - - Theile

90 Die Seitenzahl ist hier 60 statt 90.

— — 11. 4 fl. 55 kr. - - 4 fl. 5 kr.

— — 12. $2\frac{10}{13}$ Lin. - - $9\frac{3}{13}$ Lin.

94 — 9. Brüche - - Brüche von Brüchen

98 — 2. Nenner - - Zähler

101 — 7. von unten. Decimalzeichens - - Deicimalzeichens einen

114 — 4. 2,54 ꝛc. - - 2,44 ꝛc.

— — 19. wahr ist - - wahr,

120 — 6. Glieder sind - - Gleichartige Glieder sind

120 — 14. Muß nach zweyter Abschnitt gesetzt werden: Addition der algebraischen Größen.

Seite. Zeile.

121 — 5. ab -- $5ab$

128 — 20. $-10x$ -- $-10x^2$ und so auch in der Summe Z. 22.

131 — 4. von unten. $\frac{5x+20xb}{5x}$ -- $\frac{5x+20xb}{5x} = 1+4b$

132 — 11. $a^{4-2}\ a$ -- a^{4-2}

13. $b^{6-2}\ c^{3-1}\ b^4 c^2$ -- $b^{6-2}\ c^{3-1} = b^4 c^2$

vorletzte $a\frac{1}{2}$ -- $a^{\frac{1}{2}}$

133 — 2. $a^{-3} = a^{\frac{1}{3}}$ -- $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

137 — 1. Hier muß überall + für × gesetzt werden.

143 — 15. $-1\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ -- $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

— 18. Diese Zeile wird weggelassen.

144 — 2. $0 = +\frac{1}{2}$ -- $0 + \frac{1}{2}$

— 5. von unten. $a \times a \times 2$ -- $a \times a \times a$

148 — von unten. $a^{\frac{1 \times a}{2\ 2}}$ -- $a^{\frac{1}{2} \times a}$

150 — IIII. muß + bey b^2 wegbleiben.

152 — 15. $\frac{120}{6}$ -- $\frac{120}{6} = 20$

— letzten Zeile im ersten Divisor $1+2$ -- 1×2

152 — 11. $a^3 \times 3a^2b \times 3ab^2 \times b^3$ -- setze überall +

letzten Zeile $a^m \frac{b^3}{a}$ -- $a^m \frac{b^3}{a^3}$

154 — 8. $\frac{m-1}{2} = \frac{b}{a}$ -- $\frac{m-1}{2}\ \frac{b}{a}$.

168 — 3. $a^{\frac{1}{2}}$ -- $a^{\frac{2}{2}}$

— 6. von unten $(1-y^2) - \frac{1}{2}$ -- $(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

174 — 6. $\frac{a}{b}$ -- $\frac{b}{a}$

180 — 4. von unten $\sqrt{ab^3}$ -- $\sqrt{a}\, b^{\frac{1}{3}}$

Seite Zeile.

183 — 5. von unten $2\sqrt[6]{a^3 b^3}$ -- $2\sqrt[6]{a^3 d^3}$.

185 — 10. ungewöhnlichen -- unmöglichen

210 — 9. 0 -- 1

235 — 4. $cx - bc$ -- $cx - bx$

237 — 8. 560 fl. -- 460 fl.

239 — 3. von unten $\frac{8}{18}$ -- $\frac{x}{18}$

243 — 1. $\begin{array}{cc} * & * \\ * & 6 \end{array}$ -- $\begin{array}{cc} * & * \\ * & 6 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{48} \end{array}$

244 — 1. unbenannte -- unbekannte

267 — 17. müssen die Zahlen 41, 48, 58 wegbleiben.

— 5. von unten Z -- 2

305 — 8. $d \pm \sqrt{}$ -- $-d \pm \sqrt{}$

— 2 von unten er -- der

306 — 6. $d + \sqrt{}$ -- $d \pm \sqrt{}$

— 10. $\overline{2a}\,d^2$ -- $\overline{2a - d^2}$

307 — 10. $d + \overline{\omega - a}$ -- $\overline{d + \omega - a}$

320 — 8. consequens -- wird ausgelassen.

— 22. 300 -- 30.

333 — 4. $524\frac{1}{2}$ -- $524\frac{2}{3}$

336 — 6. 100 : 100 -- 100 : 110.

349 — 20. $\frac{d = \omega - a}{m + 1}$ -- $d = \frac{\omega - a}{m + 1}$